Präzisionsmessung der Analysierstärke in der Proton - Proton - Streuung bei 12 MeV

von

Armin Rauscher

aus

Herrieden

Disbui. Erlangen
1986

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538110_0009

Präzisionsmessung der Analysierstärke in der Proton - Proton - Streuung bei 12 MeV

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten

der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Armin Rauscher

aus

Herrieden

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 14. November 1986

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. G. Nollau

Erstberichterstatter: Priv.Doz. Dr. W. Kretschmer

Zweitberichterstatter: Professor Dr. A. Hofmann

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Zusammenfassung	1
1	**Einleitung**	2
2	**Theorie**	6
2.1	Potentialmodelle	6
2.2	Bestimmung der S-Matrix	9
2.3	Berechnung der Observablen	15
2.4	Parametrisierung der S-Matrix durch Streuphasen	20
2.5	Vakuumpolarisation	25
2.6	Energieabhängigkeit der Streuphasen	30
3	**Experiment**	32
3.1	Allgemeines	32
3.2	Fensterloses Gastarget	32
3.3	Detektoranordnung	37
3.4	Datenaufnahme	42
4	**Auswertung**	45
4.1	Datenaufbereitung	45
4.2	Analysierstärkeauswertung	47
4.3	Ergebnisse	57
5	**Analyse und Diskussion**	59
5.1	Streuphasenprogramm	59
5.2	Bestimmung der Bestfitparameter	62
5.3	Streulängen und effektive Reichweiten	78
6	**Schlußbemerkung**	84
	Literaturverzeichnis	86

Zusammenfassung

Zur Untersuchung der nichtzentralen Anteile der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde eine Präzisionsmessung der Analysierstärke A_y der Reaktion $^1H(\vec{p},p)$ bei 12 MeV durchgeführt.

Die Messungen erfolgten mit dem Erlanger fensterlosen Jet-Gastarget, das am EN-Tandembeschleuniger der ETH Zürich installiert wurde. Es wurde bei 13 Streuwinkeln im Bereich von 5° bis 45° im Laborsystem gemessen und dabei eine statistische Genauigkeit von etwa $8 \cdot 10^{-5}$ erreicht. Der maximale Effekt ist $-3{,}3 \cdot 10^{-3}$ bei $\Theta_{Lab} = 10°$. Für die Winkel bis 22,5° wurden die Protonen in Koinzidenz mit den Rückstoßprotonen mit Plastikszintillatoren nachgewiesen, während für die restlichen Streuwinkel Oberflächensperrschichtzähler verwendet wurden.

Die Auswertung der Daten erfolgte im Rahmen einer Streuphasenanalyse, bei der auf eine korrekte Behandlung der Vakuumpolarisation Wert gelegt wurde. Die elektrischen, nichtzentralen P-Wellen-Streuphasenkombinationen Δ_{LS} und Δ_T wurden zu $\Delta_{LS} = 0{,}274° \pm 0{,}036°$ bzw. $\Delta_T = -1{,}202° \pm 0{,}012°$ bestimmt. Die Berücksichtigung vorläufiger, in Erlangen gemessener Depolarisationsdaten lieferte praktisch die gleichen Ergebnisse.

Aus den P-Streuphasen dieser Arbeit und den Ergebnissen anderer Autoren wurden die Streulängen a_{1J} und die effektiven Reichweiten r_{1J} berechnet.

Ein Vergleich der Meßdaten mit den Vorhersagen gängiger Potentialmodelle und energieabhängiger Phasenanalysen zeigte zwar geringe, jedoch im Rahmen des Fehlers signifikante Unterschiede.

1 *Einleitung*

Die Untersuchung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist eines der ältesten Probleme in der Kernphysik. Details im mikroskopischen Verständnis der Wechselwirkung sind immer noch ungeklärt, so daß das Gebiet nach wie vor aktuell bleibt.
Vor allem im Hinblick auf Anwendungen versucht man, Potentialmodelle zu entwickeln, die auf theoretischen Grundlagen (z.B. Mesonenaustausch) basieren und möglichst wenige willkürliche Parameter enthalten. Das Modell sollte eine gute Vorhersage der experimentell bestimmten Observablen liefern. Die Fortschritte in der Theorie und in der Computertechnik erlauben nun, aus dem NN-Potential Eigenschaften von Mehrnukleonensystemen zu berechnen (z.B. Fadeevgleichungen für das 3-Körperproblem) und die Nukleon-Kern-Streuung mikroskopisch zu behandeln. Die Kenntnis des mittel- und langreichweitigen Anteils der Wechselwirkung spielt dabei eine wichtige Rolle. Ein experimentelles Werkzeug, um Informationen darüber zu erhalten, sind Streuexperimente mit Protonen und Neutronen im Niederenergiebereich. Während bei der np-Streuung sowohl Zustände mit Isospin T=1 als auch solche mit T=0 möglich sind, ist bei der pp-Streuung nur das Isospintriplett T=1 möglich. Beschränkt man sich auf Energien bis etwa 25 MeV, so spielen im wesentlichen nur die S- und P-Wellen eine Rolle. Für die pp-Streuung bedeutet dies, daß nur 4 Parameter festzulegen sind, was bei genauer Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts und der Analysierstärke auf modellunabhängige Weise möglich ist. Im folgenden wird eine Zusammmenfassung aller bisherigen pp-Messungen der Polarisation oder der Analysierstärke im Energiebereich <25 MeV gegeben; in Fig 1.1 sind die Ergebnisse zusammen mit der Vorhersage einer neueren Streuphasenanalyse (Arn 83) abgebildet.

Die ersten Polarisationsmessungen im Niederenergiebereich wurden von Brockman (Bro 58) bei 17,7 MeV und von Blanpied (Bla 59) bei 16,2 MeV durchgeführt. Da es sich um jeweils ein Doppelstreuexperiment handelte, waren die Zählraten extrem gering (ein Ereignis in 3 Minuten) und die Ergebnisse aufgrund des großen Fehlers mit allen vorhandenen Streuphasenanalysen verträglich. Die Messung von Alexeff bei 3,3 MeV

(Ale 60), ebenfalls ein Doppelstreuexperiment, lieferte Polarisationswerte, die stark positiv waren und mit keinem realistischen Phasensatz beschrieben werden konnten. Es wurden Korrekturen bis zu 0,6 % absolut angewandt. Die systematischen Fehler wurden hier möglicherweise unterschätzt. Slobodrian (Slo 67) maß bei 3 Energien zwischen 10 und 20 MeV die Analysierstärke. Auch diese Ergebnisse standen im Widerspruch zu vorhandenen Phasenanalysen (Mac 67). Von Catillon (Cat 68) wurde daher eine Messung bei 19,7 MeV durchgeführt, bei der durch den Einsatz einer polarisierten Quelle eine statistische Genauigkeit von 1 Promille erreicht wurde. Der größte Effekt tritt bei Vorwärtswinkeln auf. In diesem Winkelbereich konnte jedoch wegen der Verwendung eines Festkörpertargets nicht gemessen werden.
Die ersten Messungen, die zusammen mit Wirkungsquerschnittsdaten eine modellunabhängige Bestimmung der ^{3}P-Streuphasen erlaubten, wurden von Hutton bei 10 MeV (Hut 75), Lovoi bei 16 MeV (Lov 75) und Bittner bei 6,141 MeV (Bit 79) vorgestellt. Hutton und Lovoi benutzten Gaszellen und deckten den Winkelbereich $\Theta_{Lab} \geq 10^\circ$ ab. Beide Messungen erreichten eine Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-4}$. Während Lovoi Übereinstimmung mit einer Analyse von Mac Gregor (Mac 69) feststellte, fand Hutton deutliche Diskrepanzen zur gleichen Phasenanalyse. Die Messung von Bittner wurde mit einem fensterlosen Jet-Gastarget durchgeführt. Dadurch konnten Laborstreuwinkel ab 7,5° gemessen werden. Die Genauigkeit betrug $3 \cdot 10^{-4}$. 1982 stellte Barker zwei Messungen bei 5,05 und 9,85 MeV vor, die mit einem statistischen Fehler von $5 \cdot 10^{-5}$ die bisher genauesten Messungen darstellen (Bar 82). Hier wurde der Winkelbereich von 7,5° bis 45° gemessen. Die L=1-Streuphasen konnten auf 0,02° bis 0,09° genau angegeben werden und es war erstmals möglich, die Streulängen und effektiven Reichweiten für die P-Streuphasen modellunabhängig zu bestimmen.

Das Ziel dieser Arbeit war es, bei 12 MeV eine Analysierstärkemessung mit vergleichbarer Genauigkeit durchzuführen, um die Datenbasis für globale Streuphasenanalysen zu verbessern, die nichtzentralen Streuphasenkombinationen Δ_{LS} und Δ_T bei dieser Energie festzulegen und schließlich die eff. Reichweiteparameter genauer zu bestimmen.

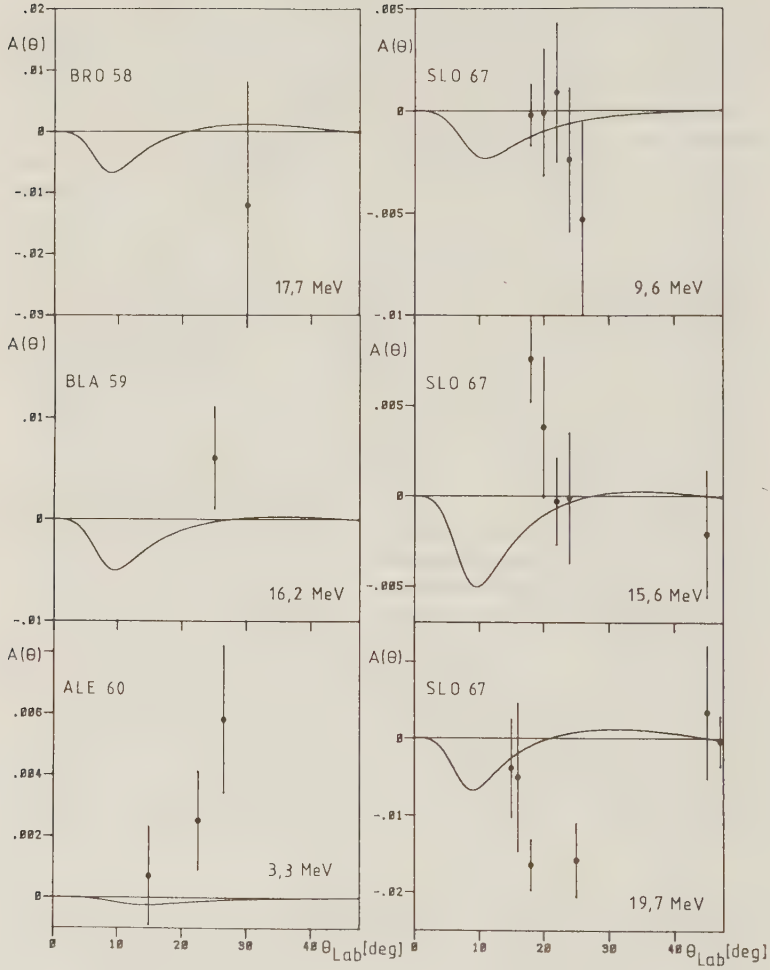

Fig. 1.1: Analysierstärkemessungen der Reaktion $^1H(\vec{p},p)$ im Niederenergiebereich.

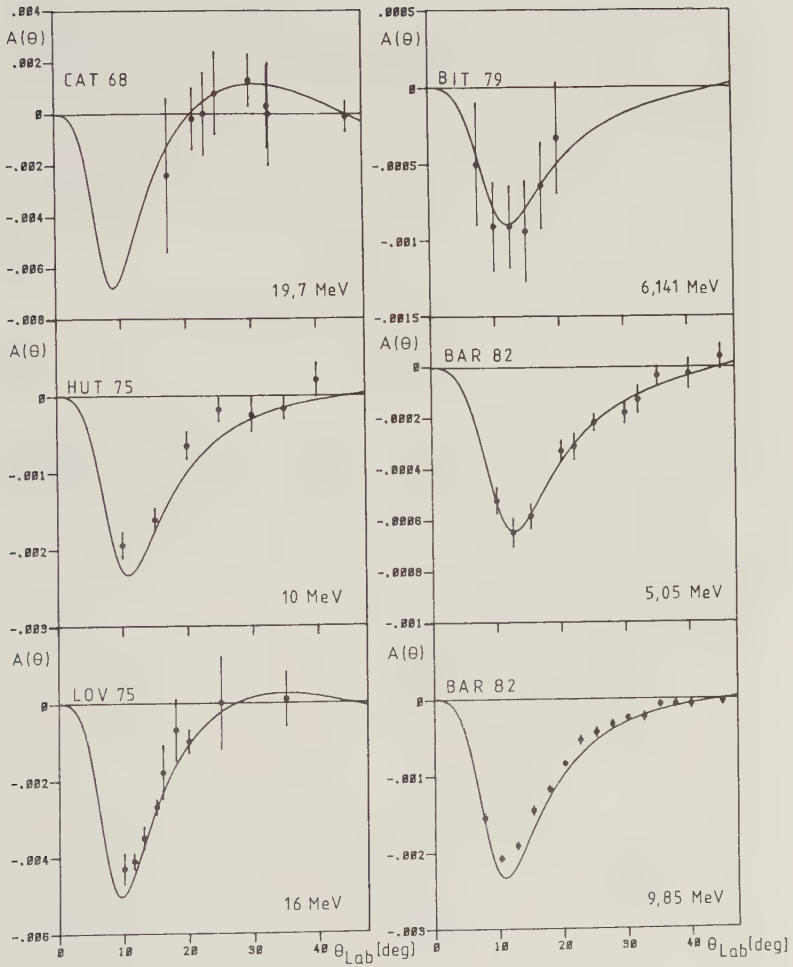

Fig. 1.2: Analysierstärkemessungen der Reaktion $^1H(\vec{p},p)$ im Niederenergiebereich.

UNIV. LEIDEN BIBL.

2 Theorie

2.1 Potentialmodelle

Von dem durch die starke Wechselwirkung verursachten Potential V_N zwischen zwei Protonen wird angenommen, daß es folgende Eigenschaften hat (Gam 60):

1) Das Potential hängt nur von den Spins $\underline{\sigma}_1$ und $\underline{\sigma}_2$ der beiden Nukleonen sowie vom Abstand $\underline{r}$ und dem relativen Impuls $\underline{p}$ ab
2) Das Potential ist rotationsinvariant
3) Es gilt Ladungserhaltung
4) Das Potential ist symmetrisch bei Teilchenaustausch
5) Es gilt Paritätserhaltung
6) Das Potential ist zeitumkehrinvariant
7) Das Potential ist ladungssymmetrisch

Bei identischen Spin-1/2-Teilchen ist ferner das Pauli-Prinzip zu beachten. Es besagt, daß die Gesamtwellenfunktion des Proton - Proton - Systems bezüglich Teilchenaustausch antisymmetrisch sein muß. Dies führt zu der Bedingung $P\cdot(-1)^{S+1}\cdot(-1)^{T+1} = -1$. Da die Parität P und der Isospin T hier Erhaltungsgrößen sind, muß dies auch für den Gesamtspin S gelten.

Im Niederenergiebereich kann man die zusätzliche Annahme machen, daß das Wechselwirkungspotential V näherungsweise nur linear vom Impuls $\underline{p}$ abhängt. Die allgemeinste Form von V ist dann gegeben durch (Gam 60):

$$V = \hat{V}_C(r) + \hat{V}_{SS}(r)\cdot\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2 + \hat{V}_{LS}(r)\cdot\underline{L}\cdot\underline{S} + \hat{V}_T(r)\cdot S_{12} \qquad (1)$$

Jeder der 4 Terme $\hat{V}_i(r)$ hängt dabei noch in folgender Weise vom Isospin ab:

$$\hat{V}_i(r) = V_i^{(1)}(r) + V_i^{(2)}(r)\cdot\underline{\tau}_1\underline{\tau}_2$$

$\underline{\sigma}_1$ bzw. $\underline{\sigma}_2$ und $\underline{\tau}_1$ bzw. $\underline{\tau}_2$ sind die Pauli-Spinoperatoren und die Isospinoperatoren, die auf Teilchen 1 bzw. Teilchen 2 wirken. $\underline{L}=\underline{r}\times\underline{p}$ ist der Bahndrehimpulsoperator, $\underline{S}=1/2(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2)$

der Spinoperator des Nukleon-Nukleon-Systems und $S_{12} = 3\cdot(\underline{\sigma}_1\cdot\hat{\underline{r}})(\underline{\sigma}_2\cdot\hat{\underline{r}}) - \underline{\sigma}_1\cdot\underline{\sigma}_2$ ist der Tensoroperator, wobei $\hat{\underline{r}}$ der Einheitsvektor längs der Verbindungslinie der beiden Teilchen ist. $\hat{V}_C$, $\hat{V}_{SS}$, $\hat{V}_{LS}$ und $\hat{V}_T$ werden als Zentral-, Spin-Spin-, Spin-Bahn- und Tensorpotential bezeichnet. Der Operator $\underline{\tau}_1\underline{\tau}_2$ hat den Eigenwert 1 für Zustände mit Isospin T=1 (Proton-Proton-System) und den Eigenwert -3 für Zustände mit T=0. Entsprechendes gilt für den Operator $\underline{\sigma}_1\underline{\sigma}_2$ bezüglich des Gesamtspins S. Da S und T gute Quantenzahlen sind, kann man für ein vorgegebenes Wertepaar (S,T) diese Operatoren durch deren Eigenwerte ersetzen. Gleichung (1) erhält dann die Gestalt

$$V = V_C(r) + V_{LS}(r)\cdot\underline{L}\underline{S} + V_T(r)\cdot S_{12} \qquad (2)$$

Verzichtet man auf die Einschränkung, daß das Potential nur linear von $\underline{p}$ abhängt, so erhält V einen vierten Term $V_Q(r)\cdot Q_{12}$, wobei man für Q_{12} den quadratischen Spin - Bahn - Operator $(\underline{L}\cdot\underline{S})^2$ wählen kann. Die Potentiale $\hat{V}_i$ können jetzt Funktionen der Ortsvariablen r, des Impulsquadrats $\underline{p}^2$ und des Bahndrehimpulsquadrats $\underline{L}^2$ sein.

Es sind seit langem Versuche unternommen worden, eine auf fundamentalen Prinzipien beruhende Theorie zu finden, welche die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung quantitativ richtig beschreibt. Auch mit der Einführung der Quantenchromodynamik (QCD) ist das Problem bis heute noch nicht zufriedenstellend gelöst.

Um die reichlich vorhandenen experimentellen Nukleon-Nukleon-Streudaten einheitlich beschreiben zu können, konstruierte man daher zunächst rein phänomenologische Potentiale, deren Spin- und Isospinabhängigkeit durch die obigen Invarianzbetrachtungen bestimmt wurden. Die Radialabhängigkeit der Potentialterme wurde durch an das Experiment anzupassende Parameter festgelegt. Ein bekanntes Beispiel dafür ist das Hamada-Johnston-Potential (Ham 62). Es enthält 29 willkürliche Parameter. Davon beschreibt u.a. einer den abstoßenden "hard core" des Nukleons.

Ansatzpunkt für ein mikroskopisches Verständnis des NN-Potentials war der Vorschlag von Yukawa (1935), die Wechselwirkung durch den Austausch eines Teilchens mit mittlerer Masse zu erklären, analog zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung durch Austausch von γ-Quanten. Da während des Austauschprozesses die Energieerhaltung verletzt ist, kann man aus der Heisenbergschen Unschärferelation bei gegebener Masse m des ausgetauschten Teilchens auf die maximale "Flugzeit" und damit auf die ungefähre Reichweite schließen. Je schwerer das Teilchen ist, umso kurzreichweitiger ist es. Umgekehrt ist die unendliche Reichweite des Coulomb-Potentials auf die Tatsache zurückzuführen, daß die γ-Quanten keine Ruhemasse besitzen. Das leichteste der in Frage kommenden Teilchen, das π^0-Meson mit einer Masse von 135 MeV/c^2, hat eine Reichweite von etwa 2 fm, was mit der empirisch bestimmten Reichweite der NN-Wechselwirkung in guter Übereinstimmung ist. Das "One Pion Exchange"-Austauschpotential (OPE) ist gegeben durch

$$V^{OPE} = g \cdot \underline{\tau}_1 \cdot \underline{\tau}_2 \left(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\sigma}_2 + S_{12} \cdot \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right) \right) \frac{1}{r} e^{-\mu r}$$

$\mu = \hbar/(mc)$ ist die inverse Comptonwellenlänge des Pions; g ist eine Kopplungskonstante, welche die Stärke der Wechselwirkung angibt.

Man sieht, daß sich das OPE-Potential nur aus einem spinabhängigen zentralen Anteil und aus einem Tensorterm zusammensetzt. Das Auftreten anderer Beiträge, insbesondere einer Spin-Bahn-Wechselwirkung, kann durch Mehrpionenaustauschprozesse bzw. durch den Austausch anderer und damit schwererer Mesonen erklärt werden. Dieser Weg wird von mehreren Forschergruppen verfolgt.

Beim Paris-Potential (Lac 80) unterscheidet man 2 Bereiche, die unterschiedlich behandelt werden. Der lang- und mittelreichweitige Anteil der Wechselwirkung ab $r \approx 0{,}8$ fm wird durch π- und 2π-Austauschprozesse beschrieben, ferner durch Austausch von ω-Mesonen als Teil des 3π-Austausches. Beim kurzreichweitigen Anteil spielen die subhadronischen Freiheitsgrade eine entscheidende Rolle, so daß die Beschreibung durch Bosonenaustausch nicht mehr sinnvoll ist. Dieser Anteil wird daher rein phänomenologisch durch Anpassung an experimentelle Daten parametrisiert (Vin 83).

Das Bonn-Potential (Mac 86) ist ein typisches Beispiel für ein OBE-Potential ("One Boson Exchange"). Statt durch Mehrpionenaustausch wird der mittelreichweitige Anteil der Wechselwirkung durch den Austausch schwerer Mesonen beschrieben. Das Modell zeichnet sich aus durch eine geringe Anzahl freier Parameter bei gleichzeitig guter Beschreibung der experimentellen Daten. Da das Bonn-Potential im Impulsraum formuliert wird, ist der Übergang in den subhadronischen Bereich nicht durch einen minimalen Abstand, sondern durch einen maximalen Impulsübertrag gekennzeichnet. Ein Nachteil der Rechnung im Impulsraum ist die schwierige Behandlung der Coulomb-Wechselwirkung (Swa 84). Die Meßergebnisse dieser Arbeit werden daher mit einem anderen OBE-Potential, dem Nijmegen-Potential (Nag 78), verglichen.

Mit der Quantenchromodynamik existiert heute eine Feldtheorie, von der man glaubt, daß sie die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks und damit auch zwischen den Nukleonen exakt beschreibt. Die Berechnungen im Rahmen von Quark- und Gluonen-Austauschprozessen wird jedoch mit steigendem Abstand der Nukleonen immer komplizierter, so daß die vorhandenen Potentialmodelle in diesem Bereich weiter ihre Bedeutung beibehalten. Es wird jedoch versucht, die bisher phänomenologische Behandlung der Wechselwirkung im Bereich $r<0,5$ fm durch Rechnungen im Quarkmodell zu ersetzen.

2.2 *Bestimmung der S-Matrix*

In den folgenden Abschnitten wird skizziert, welcher Zusammenhang zwischen den von Theoretikern postulierten Modellen des Nukleon-Nukleon-Potentials und den von Experimentatoren gemessenen Observablen besteht. Aus der Schrödingergleichung sind zunächst die Wellenfunktionen der gestreuten Teilchen zu bestimmen. Die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Wellenfunktionen reicht aus, um die Streuung vollständig zu beschreiben. Der Zusammenhang zwischen dem Zustand des Systems nach der Streuung und dem Zustand vor der Streuung wird durch Operatoren vermittelt. Durch Zerlegung der Wellenfunktion in Partialwellen erhält man eine Matrixdarstel-

lung dieser Operatoren; so z.B. die S - und die M - Matrix, deren Elemente Funktionen des Streuwinkels und der Energie sind. Symmetrieeigenschaften der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und allgemeine Erhaltungssätze führen dazu, daß auch die Streumatrizen gewisse Symmetrien aufweisen. Daher werden in der Streuphasenanalyse diese Matrizen so parametrisiert, daß sie durch einen Satz linear unabhängiger, reeller Parameter, die Streuphasen, beschrieben werden können. Aus der Streumatrix und damit aus den Streuphasen können schließlich die gewünschten Observablen berechnet werden.

Die Streuphasen sind üblicherweise die Schnittstelle zwischen Theorie und Experiment. Der Experimentator variiert einen Streuphasensatz, bis die aus ihm berechneten Observablen möglichst gut mit den experimentell bestimmten Observablen übereinstimmen. Der Theoretiker kann dann ein Potentialmodell dadurch testen, daß er die aus dem Modell berechneten Phasen mit dem experimentell bestimmten Phasensatz vergleicht.

Ausgangspunkt für die Beschreibung der Streuung zweier Teilchen, deren Wechselwirkung durch das Potential V gegeben wird, ist z.B. die stationäre Schrödingergleichung. Im Schwerpunktsystem lautet sie

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot V \right) \Psi^{+}_{S,m_S}(\underline{r}) = 0$$

μ ist die reduzierte Masse der zwei Nukleonen. $\hbar\underline{k}$ ist der Impuls im Schwerpunktsystem. Ψ beschreibt einen stationären Streuzustand, der im Eingangskanal durch den Spin S und der z-Komponente m_S gekennzeichnet ist. Es ist zweckmäßig, Ψ nach Eigenfunktionen der Operatoren $\underline{J}^2$, J_z, $\underline{L}^2$ und $\underline{S}^2$ zu entwickeln, da J, m_J und S bei diesem Problem gute Quantenzahlen sind. Diese Eigenfunktionen lauten

$$\mathcal{Y}^{LS}_{JM} = \sum_{m_L, m_S} C_{LS}(J,M;m_L,m_S)\; Y^{m_L}_{L}(\Theta,\Phi)\; \chi^{m_S}_{S}(\sigma) \qquad (3)$$

Die Kugelflächenfunktionen Y, die Eigenfunktionen zu $\underline{L}^2$ und L_z sind, und die Spinwellenfunktionen χ, die Eigenfunktionen zu $\underline{S}^2$ und S_z sind, werden mittels der Clebsch-Gordan-Koef-

fizienten C zu Eigenfunktionen von $\underline{J}^2$, J_z, $\underline{L}^2$ und $\underline{S}^2$ gekoppelt. Damit läßt sich Ψ wie folgt schreiben (Rod 67):

$$\Psi^{+}_{Sm_S}(\underline{r}) = \sum_{LL'S'JM} \delta_{S'S}\, i^{L}\sqrt{4\pi(2L+1)}\, C_{LS}(JM;0m_S)\frac{1}{kr}u^{JS}_{L'L}(kr)\,\mathcal{Y}^{L'S'}_{JM} \qquad (4)$$

Die radiale Wellenfunktion $u^{JS}_{L'L}(kr)$ beschreibt einen Streuzustand, in dem das Projektil im Eingangskanal den Bahndrehimpuls L und nach der Streuung den Bahndrehimpuls L' hat. Für die Summation gilt $|J-S| \le L,L' \le J+S$. Wegen der Wahl des Koordinatensystems (z-Achse parallel zur Richtung der einlaufenden Teilchen) kann man sich auf Terme mit der Quantenzahl $m_L=0$ beschränken. Die Konstanten sind so gewählt, daß sich für eine ebene Welle

$$\Psi^{+}_{Sm_S}(\underline{r}) = e^{ikz}\cdot\chi^{m_S}_{S}$$

in obiger Entwicklung die Radialfunktionen

$$u^{JS}_{L'L}(kr) = F_L(kr)\cdot\delta_{L'L}$$

ergeben. Es ist $F_L(kr) = kr\cdot j_L(kr)$, wobei j_L die sphärischen Besselfunktionen sind. Setzt man die Entwicklung (4) in die Schrödingergleichung ein und benutzt die Identität

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\underline{L}^2,$$

beachtet man, daß die $\mathcal{Y}$ Eigenfunktionen von $\underline{L}^2$ sind, und nutzt man deren Orthogonalität und die Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus, so kommt man auf das Differentialgleichungssystem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{L'(L'+1)}{r^2} + k^2\right)u^{JS}_{L'L}(kr) - \frac{2\mu}{\hbar^2}\sum_{L''}V^{JS}_{L'L''}(r)\cdot u^{JS}_{L''L}(kr) = 0$$

Die Matrixelemente (5)

$$V^{JS}_{L'L''}(r) := \left(\mathcal{Y}^{L'S}_{JM},\ V\cdot\mathcal{Y}^{L''S}_{JM}\right)$$

beinhalten dabei eine Integration über die Winkelvariablen und eine Summation über die Spinvariablen. Speziell die in Gl. (2) verwendeten Potentialterme haben die folgenden Matrixelemente:

Für das Zentralpotential:

$$V^{JS}_{L'L''} = \delta_{L'L''} \cdot V_C(r) \qquad (6)$$

Für das Spin-Bahn-Potential:

$$V^{JS}_{L'L''} = \delta_{L'L''} \cdot V_{LS}(r) \cdot \frac{1}{2}(J(J+1)-L'(L'+1)-S(S+1)) \qquad (7)$$

Für das Tensorpotential: (8)

$$V^{JS}_{L'L''}(r) = \delta_{S,1} \cdot V_T(r) \cdot$$

L' \ L''	J-1	J	J+1
J-1	$\frac{-2(J-1)}{2J+1}$	0	$\frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$
J	0	2	0
J+1	$\frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$	0	$\frac{-2(J+2)}{2J+1}$

Die Berechnung der Matrixelemente des Tensoroperators findet man bei (Gol 64). Enthält das Potential V einen solchen Operator, so gibt es Übergänge zwischen verschiedenen L' und L'', d.h. der Bahndrehimpuls ist keine Erhaltungsgröße mehr. Gl. (5) wird dann ein System von maximal 2 gekoppelten Differentialgleichungen. Daraus können die Radialfunktionen $u^{JS}_{L'L}(kr)$ berechnet werden. Aus den möglichen Lösungen sind diejenigen auszuwählen, die im Ursprung regulär sind. Die Normierung erhält man auf folgende Weise: Außerhalb der Reichweite des Potentials V und für kr>>L' kann man die Radialfunktionen als Linearkombinationen der beiden linear unabhängigen Lösungen exp(ikr), exp(-ikr) der homogenen Differentialgleichung darstellen, d.h.

$$u^{JS}_{L'L}(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{2i} i^{-L'} (-(-1)^{L} e^{-ikr} \delta_{L'L} + S^{JS}_{L'L} e^{ikr}) \qquad (9)$$

Die gesamte Wellenfunktion muß sich asymptotisch als Summe aus einer in z-Richtung einlaufenden ebenen Welle und einer radial auslaufenden Kugelwelle schreiben lassen. Der Anteil exp(-ikr) der Radialfunktion, der zu einer einlaufenden Kugelwelle gehört, darf daher nur von der Partialwellen-Entwicklung der einlaufenden ebenen Welle, also von der Funktion $F_L(kr)$ stammen. Der Faktor vor exp(-ikr) ist dadurch

festgelegt. Die Funktion F_L erhält man, wenn oben $S^{Js}_{L'L}$ durch $\delta_{L'L}$ ersetzt wird. Die $S^{Js}_{L'L}$ sind die Elemente der S-Matrix. Sie beschreiben den Übergang eines Streuzustandes, in dem ein Projektil mit Gesamtdrehimpuls J und Bahndrehimpuls L auf das Target trifft und nach der Streuung den Bahndrehimpuls L' besitzt. Für physikalisch nicht erlaubte Übergänge L→L' läßt sich die Randbedingung (9) nur mit $S^{Js}_{L'L}=0$ erfüllen. Dies hat dann wegen $\delta_{L'L}=0$ ein Verschwinden der entsprechenden Radialfunktion zur Folge. Alle S-Matrixelemente sind daher durch die asymptotische Randbedingung eindeutig festgelegt.

Die möglichen Streuzustände des Proton-Proton-Systems werden üblicherweise nach der spektroskopischen Notation $^{2s+1}L_J$ klassifiziert. Von den verschiedenen Möglichkeiten, den Spin S und den Bahndrehimpuls L zum Gesamtdrehimpuls J zu koppeln, kommen nur diejenigen vor, für die das Pauli-Prinzip erfüllt ist. Da der Isospin T beim Proton-Proton-System eins ist und für die Parität $P=(-1)^L$ gilt, ist das Pauli-Prinzip nur für geradzahlige Werte von L+S erfüllt. Nach Bahndrehimpulsen sortiert erhält man daher die folgenden Zustände:

	J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	
L=0	$^1S_0$					
L=1	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$			
L=2			$^1D_2$			
L=3			$^3F_2$	$^3F_3$	$^3F_4$	
L=4					$^1G_4$	
L=5					$^3H_4$	usw.

Berücksichtigt man, daß J und S Erhaltungsgrößen sind, können Übergänge nur zwischen $^3P_2$ und $^3F_2$, zwischen $^3F_4$ und $^3H_4$ usw. auftreten. Die S-Matrix hat daher folgende allgemeine Gestalt:

Da keine Übergänge zwischen unterschiedlichen J stattfinden, zerfällt sie in Untermatrizen $\underline{\underline{S}}^J$. Für ungerade J hat man $\underline{\underline{S}}^J = S^{J1}_{JJ}$. Für J=0 ist $\underline{\underline{S}}^J$ diagonal mit den Elementen S^{00}_{00} und S^{01}_{11}. Für geradzahlige J≥2 ergibt sich

$$\underline{\underline{S}}^{J} = \begin{array}{c|cc|ccc} & L & & J & J-1 & J+1 \\ & & S & 0 & 1 & 1 \\ \hline & J & 0 & S^{J,0}_{J,J} & 0 & 0 \\ & J-1 & 1 & 0 & S^{J,1}_{J-1,J-1} & S^{J,1}_{J-1,J+1} \\ & J+1 & 1 & 0 & S^{J,1}_{J+1,J-1} & S^{J,1}_{J+1,J+1} \end{array}$$

Die S-Matrix-Elemente sind durch das asymptotische Verhalten Gl. (9) eindeutig bestimmt. Für deren praktische Berechnung geht man jedoch besser von einer Integraldarstellung aus, die im folgenden kurz hergeleitet wird und in Kap. 2.5 Anwendung findet. Der Rechengang entspricht dem bei (Rod 67) behandelten Spezialfall der Streuung spinloser Teilchen. Angenommen, das Wechselwirkungspotential V ist als Summe zweier Terme gegeben:

$$V = V^{\langle 0\rangle} + V^{\langle 1\rangle} \qquad (10)$$

$v^{JS}_{L'L}$ bzw. $u^{JS}_{L'L}$ seien die Lösungen der Radialgleichung Gl. (5) bei Anwesenheit des Potentials $V^{\langle 0\rangle}$ bzw. V mit dem vorgeschriebenen asymptotischen Verhalten. Man betrachtet nun die Identität

$$\frac{d}{dr}\left(v^{JS}_{L'L'}\left(u^{JS}_{L'L}\right)' - u^{JS}_{L'L}\left(v^{JS}_{L'L'}\right)'\right) = v^{JS}_{L'L'}\left(u^{JS}_{L'L}\right)'' - u^{JS}_{L'L}\left(v^{JS}_{L'L'}\right)''$$

Die Striche bedeuten die Ableitung nach r. Löst man Gl. (5) nach $(u^{JS}_{L'L})''$ bzw. $(v^{JS}_{L'L'})''$ auf und setzt das Ergebnis in die rechte Seite der obigen Gleichung ein, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (10) den Ausdruck

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\sum_{L''} V^{JS(0)}_{L'L''}\cdot\left(u^{JS}_{L''L}\cdot v^{JS}_{L'L'} - v^{JS}_{L''L'}\cdot u^{JS}_{L'L}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\sum_{L''} V^{JS(1)}_{L'L''}\cdot u^{JS}_{L''L}\cdot v^{JS}_{L'L'}$$

Die Summe links verschwindet, wenn $V^{JS\langle 0\rangle}_{L'L''} \sim \delta_{L'L''}$. Dies ist immer bei Zentralpotentialen, aber auch bei $\underline{L}\cdot\underline{S}$-Potentialen der Fall. Durch Integration der vorletzten Gleichung zwischen r=0 und r=∞ ergibt sich dann

$$\left[v^{JS}_{L'L'}\left(u^{JS}_{L'L}\right)' - u^{JS}_{L'L}\left(v^{JS}_{L'L'}\right)'\right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{2\mu}{\hbar^2}\sum_{L''}\int_0^{\infty} V^{JS(1)}_{L'L''}\cdot u^{JS}_{L''L}\cdot v^{JS}_{L'L'}\,dr$$

Der Ausdruck in der Klammer ist wegen der Regularität der Radialfunktionen Null an der Stelle r=0. Den Wert für $r\to\infty$ erhält man durch Einsetzen der asymptotischen Bedingung (9) mit dem Ergebnis

$$S^{JS}_{L'L} - S^{JS(0)}_{L'L}\cdot\delta_{L'L} = -2i\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\sum_{L''}\int_0^\infty V^{JS(1)}_{L'L''}\cdot u^{JS}_{L''L}\cdot v^{JS}_{L'L'}\,dr \qquad (11)$$

Aus dieser Gleichung kann man die durch Einschalten des Zusatzpotentials $V^{(1)}$ bewirkte Änderung der S-Matrix berechnen. Wenn man $V^{(1)}$ als kleine Störung behandeln kann, so lassen sich im Rahmen der "distorted wave Born approximation" oder kurz DWBA in Gl. (11) die Radialfunktionen $u^{JS}_{L''L}$ durch $v^{JS}_{L'L}\cdot\delta_{L''L}$ ersetzen. In dieser Näherung läßt sich die S-Matrix ohne Lösen der Schrödingergleichung berechnen, sofern die Radialfunktionen zum Potential $V^{(0)}$ bekannt sind.
Ein Spezialfall von Gl. (11) ergibt sich mit $V^{(0)}=0$. Dann wird $S^{JS(0)}_{L'L}=\delta_{L'L}$ und $v^{JS}_{L'L}(kr)=F_{L'}(kr)$, was sich direkt aus der Randbedingung Gl. (9) ergibt. Die S-Matrix ist dann gegeben durch

$$S^{JS}_{L'L} - \delta_{L'L} = -2i\,\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\sum_{L''}\int_0^\infty F_{L'}(kr)V^{JS}_{L'L''}(r)u^{JS}_{L''L}(kr)\,dr \qquad (12)$$

2.3 Berechnung der Observablen

Setzt man die asymptotische Radialfunktion $u^{JS}_{L'L}$ in die Entwicklung von $\Psi^{+}_{Sm_S}$ ein und spaltet die ebene Welle $\exp(ikz)\chi^{m_S}_S$ ab, ergibt sich die Darstellung der asymptotischen Lösung der stationären Schrödingergleichung als Summe aus einlaufender und gestreuter Welle:

$$\Psi^{+}_{Sm_S} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz}\chi^{m_S}_S + \frac{1}{r}e^{ikr}\cdot\frac{1}{2ik}\sum_{LL'S'JM}\sqrt{4\pi(2L+1)}\,C_{LS}(JM;0m_S)$$

$$\cdot i^{(L-L')}(S^{JS}_{L'L}-\delta_{L'L})\delta_{S'S}\,\mathcal{Y}^{L'S'}_{JM}$$

Setzt man hier die Entwicklung (4) für die $\mathcal{Y}$ ein und berücksichtigt, daß in der Summe nur Terme mit $M = m_S$ und solche mit $m_L' + m_S' = m_S$ ungleich Null sind, erhält man

$$\psi^{+}_{Sm_S} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz}\,\chi_S^{m_S} + \frac{1}{r}e^{ikr}\cdot\sum_{S'm_{S'}} M_{S'm_{S'};Sm_S}(\theta,\phi)\cdot\chi_{S'}^{m_{S'}} \qquad (13)$$

mit der Abkürzung

$$M_{S'm_{S'};Sm_S} = \frac{1}{2ik}\sum_{LL'J}\delta_{S'S}\cdot i^{L-L'}\cdot\sqrt{4\pi(2L+1)}\,C_{LS}(Jm_S;0m_S)\cdot \qquad (14)$$

$$\cdot C_{L'S'}(Jm_S;m_S-m_{S'}\,m_{S'})\cdot(S^{JS}_{L'L}-\delta_{L'L})\cdot Y_{L'}^{m_S-m_{S'}}$$

Die Zahlen $M_{S'm_{S'};Sm_S}$ stellen die Streuamplituden für die Streuung mit dem Spinzustand $\chi_S^{m_S}$ im Eingangskanal und $\chi_S^{m_{S'}}$ im Ausgangskanal dar. Sie können als Elemente einer 4x4-Matrix, der M-Matrix $\underline{\underline{M}}$, aufgefaßt werden. Bei der Proton-Proton-Streuung (identische Teilchen) ist die Gesamtwellenfunktion gemäß dem Pauli-Prinzip zu antisymmetrisieren. $M_{S'm_{S'};Sm_S}$ muß daher durch $M_{S'm_{S'};Sm_S}(\theta,\phi)-(-1)^{S+1}\cdot M_{S'm_{S'};Sm_S}(\pi-\theta,\phi+\pi)$ ersetzt werden. Die Symmetrieeigenschaften der Proton-Proton-Wechselwirkung führen dazu, daß von den 16 M-Matrixelementen nur 5 unabhängig voneinander sind. Wählt man für den Azimutstreuwinkel $\phi=0$, so ergibt sich:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{array}{cc|cccc} S & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & m_S & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & M_{11} & M_{10} & M_{1-1} & 0 \\ 1 & 0 & M_{01} & M_{00} & -M_{01} & 0 \\ 1 & -1 & M_{1-1} & -M_{10} & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{SS} \end{array} \qquad (15)$$

Zusätzlich muß noch die Bedingung

$$M_{11} - M_{00} - M_{1-1} = \sqrt{2}\,\cot(\theta)\cdot(\,M_{10} + M_{01}\,)$$

erfüllt sein (Gol 64).
Stellt man die Spinzustände entsprechend als 4-komponentige Spaltenvektoren $\underline{\chi}$ dar, wobei z.B. $(0,0,0,1)^t$ dem Zustand χ_0 entspricht, so läßt sich Gl. (13) in der kompakten Form

$$\psi^{+}_{Sm_S} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz}\cdot\underline{\chi} + \frac{1}{r}e^{ikr}\cdot\underline{\underline{M}}\cdot\underline{\chi} \qquad (16)$$

schreiben.

Explizite Formeln für die $M_{\lambda,\mu}$, die aus Gl. (14) durch Einsetzen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten gewonnen werden, findet man z.B. bei (Hos 68). Neben der oben beschriebenen Darstellung der M-Matrix ist noch eine auf Wolfenstein zurückgehende Darstellung üblich (Wol 52). Dort wird die M-Matrix nach 5 linear unabhängigen Basismatrizen zerlegt, deren Koeffizienten, die Wolfensteinamplituden, sich aus einer linearen Transformation aus den $M_{\lambda,\mu}$ ergeben.

Die Gleichung (13) beschreibt den Zusammenhang zwischen der einfallenden Welle und der gestreuten Welle für einen reinen Spinzustand im Eingangskanal. Bei einem Streuexperiment liegt jedoch im allgemeinen ein statistisches Gemisch von verschiedenen Spinzuständen vor, die ihrerseits Linearkombinationen der betrachteten Basiszustände z. B. der Sm_S-Darstellung sind.

Zur Beschreibung des Polarisationszustandes von Teilchenstrahl und Target verwendet man daher den Formalismus der Dichtematrix (Fan 57). Wenn $\underline{\chi}_n$ die als 4-komponentige Spaltenvektoren geschriebenen normierten Spinoren im Eingangskanal mit den relativen Häufigkeiten w_n sind, so wird die Dichtematrix $\underline{\underline{\varrho}}_{\lambda}$ im Eingangskanal definiert durch

$$\underline{\underline{\varrho}}_{\lambda} := \sum_n w_n \underline{\chi}_n \underline{\chi}_n^{\dagger}$$

Für die Spur von $\underline{\underline{\varrho}}_{\lambda}$ gilt $Sp(\underline{\underline{\varrho}}_{\lambda}) = 1$. Mit Hilfe von Gl. (16) kann daraus die Dichtematrix $\underline{\underline{\varrho}}_{\epsilon}$ im Ausgangskanal berechnet werden:

$$\underline{\underline{\varrho}}_{\epsilon} := \sum_n w_n (\underline{\underline{M}}\underline{\chi}_n)(\underline{\underline{M}}\underline{\chi}_n)^{\dagger} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varrho}}_{\lambda}\underline{\underline{M}}^{\dagger} \qquad (17)$$

Bei dieser Umformung wurde benutzt, daß für zwei beliebige Matrizen A und B gilt: $(A \cdot B)^{\dagger} = B^{\dagger} \cdot A^{\dagger}$. Im weiteren wird außerdem mehrfach von der Beziehung $Sp(A \cdot B) = Sp(B \cdot A)$ Gebrauch gemacht.
Beachtet man, daß die 4 Komponenten des Vektors $\underline{\underline{M}}\underline{\chi}_n$ die Streuamplituden für die Streuung aus dem Eingangskanal $\underline{\chi}_n$ sind, ergibt sich der differentielle (polarisierte) Wirkungsquerschnitt I zu

$$I = \sum_n w_n \, |\underline{\underline{M}}_{\chi n}|^2 = Sp(\underline{\underline{\varrho}}_f)$$

Aus der Dichtematrix kann man jedoch nicht nur den Wirkungsquerschnitt, sondern auch den Erwartungswert eines beliebigen im Spinraum wirkenden Operators $\underline{\underline{S}}$ und damit den Polarisationszustand des Systems berechnen. Für den Ausgangskanal hat man dabei zu beachten, daß der Zustand $\underline{\underline{M}}_{\chi n}$ nicht normiert ist und daß die Wahrscheinlichkeit, einen solchen Zustand im Ausgangskanal zu finden, gegeben ist durch

$$w_n^f = \frac{w_n (\underline{\underline{M}}_{\chi n})^\dagger (\underline{\underline{M}}_{\chi n})}{\sum_n w_n (\underline{\underline{M}}_{\chi n})^\dagger (\underline{\underline{M}}_{\chi n})} \qquad (18)$$

Der Erwartungswert des Operators $\underline{\underline{S}}$ ergibt sich damit aus den Gl. (17) und (18) zu

$$\langle \underline{\underline{S}} \rangle_f = \sum_n w_n^f \, \frac{(\underline{\underline{M}}_{\chi n})^\dagger \, \underline{\underline{S}} \, (\underline{\underline{M}}_{\chi n})}{(\underline{\underline{M}}_{\chi n})^\dagger (\underline{\underline{M}}_{\chi n})} = \frac{Sp(\underline{\underline{\varrho}}_f \cdot \underline{\underline{S}})}{Sp(\underline{\underline{\varrho}}_f)}$$

Auf die gleiche Weise erhält man den Ausdruck für den Erwartungswert im Eingangskanal:

$$\langle \underline{\underline{S}} \rangle_i = Sp(\underline{\underline{\varrho}}_i \cdot \underline{\underline{S}}) \qquad (19)$$

Da die Dichtematrix definitionsgemäß hermitesch ist, kann man sie als Linearkombination der 16 linear unabhängigen hermiteschen Matrizen $\underline{\underline{S}}_\mu := \underline{\underline{\sigma}}_\alpha^{(1)} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\beta^{(2)}$, $\alpha,\beta = 0,x,y,z$, darstellen. Hierbei sind $\underline{\underline{\sigma}}_{x,y,z}^{(i)}$ die Pauli-Spinmatrizen und $\underline{\underline{\sigma}}_0^{(i)}$ die Einheitsmatrix. Der obere Index (1) bzw. (2) bedeutet, daß der Operator nur auf die Spinvariablen des Teilchens 1 bzw. 2 wirkt. Die Matrizen $\underline{\underline{S}}_\mu$ genügen der Orthogonalitätsrelation

$$Sp(\underline{\underline{S}}_\mu \cdot \underline{\underline{S}}_\nu) = 4 \cdot \delta_{\mu\nu}$$

Zusammen mit Gl. (19) folgt daraus die Gültigkeit der Gleichung

$$\underline{\underline{\varrho}}_i = 1/4 \sum_\mu \langle \underline{\underline{S}}_\mu \rangle_i \underline{\underline{S}}_\mu$$

Der Wirkungsquerschnitt $I = Sp(\underline{\underline{\varrho}}_f)$ ist damit

$$I = 1/4 \sum_{\mu} \langle \underline{\underline{S}}_{\mu} \rangle_1 \cdot Sp(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{S}}_{\mu}\,\underline{\underline{M}}^{\dagger}) \qquad (20)$$

Ein polarisierter Strahl (Teilchen 1) und ein unpolarisiertes Target (Teilchen 2) sind dadurch charakterisiert, daß die Erwartungswerte aller $\underline{\underline{S}}_{\mu}$, die im Spinraum der Teilchen 2 operieren, Null sind. In diesem Fall reduziert sich Gl. (20) zu

$$I = \frac{1}{4} \left(Sp(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^{\dagger}) + \langle \underline{\sigma}^{(1)} \rangle_1 \cdot Sp(\underline{\underline{M}}\,\underline{\sigma}^{(1)}\,\underline{\underline{M}}^{\dagger}) \right) \qquad (21)$$

Die Komponenten des Vektors $\underline{\sigma}^{(1)}$ sind die drei Pauli-Matrizen. Dessen Erwartungswert bezeichnet man als Polarisation $\underline{P}$. Bei unpolarisiertem Strahl ist die Dichtematrix proportional zur Einheitsmatrix. Die Polarisation $\underline{P}$ ist dann Null und man erhält den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $I_0 = 1/4\ Sp(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{M}}^{\dagger})$. Mit der Definition der Analysierstärke,

$$\underline{A} = \frac{1}{4} Sp(\underline{\underline{M}}\,\underline{\sigma}^{(1)}\,\underline{\underline{M}}^{\dagger}) \;/\; I_0 \;, \qquad (22)$$

läßt sich Gl. (21) in der in Kapitel 4 verwendeten Form schreiben (der Übersichtlichkeit halber ist der Wirkungsquerschnitt in diesem Kapitel mit I statt mit σ bezeichnet):

$$I = I_0 \; (\; 1 + \underline{P} \cdot \underline{A} \;)$$

Um nun z. B. die Komponente A_y aus der M-Matrix von Gl. (15) berechnen zu können, benötigt man die Kanalspindarstellung des Operators $\underline{\underline{\sigma}}_y^{(1)}$. Sie erhält man auf einfache Weise, indem man die Spinwellenfunktion in der Kanalspindarstellung mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten durch die Spinwellenfunktionen der einzelnen Nukleonen ausdrückt:

$$\chi_S^{m_S'} = \sum_{m_1 m_2} C_{1/2\ 1/2}(S\ m_S; m_1\ m_2)\ \chi_{1/2}^{m_1(1)}\ \chi_{1/2}^{m_2(2)}$$

Die Matrixelemente des Operators $\underline{\underline{\sigma}}_y^{(1)}$ bezüglich der $\chi_S^{m_S}$ lassen sich damit aus den bekannten Matrixelementen bezüglich der $\chi_{1/2}^{m_1(1)}$ ausdrücken mit dem Ergebnis

$$\underline{\underline{g}}_{\gamma}^{(1)} =$$

S	m_S	1 1	1 0	1 −1	0 0
1	1	0	−1	0	1
1	0	1	0	−1	0
1	−1	0	1	0	1
0	0	−1	0	−1	0

Setzt man diese Matrix zusammen mit der M-Matrix Gl. (16) in die Definitionsgleichung (22) von A_γ ein, so ergibt sich schließlich:

$$I_0 \cdot A_\gamma = \sqrt{2}/2 \; \mathrm{Re}[i(M_{10}(M_{11}-M_{1-1})^*-M_{01}M_{00}^*)]$$

mit

$$I_0 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} |M_{ij}|^2$$

Eine Liste weiterer Observabler, ausgedrückt durch die M-Matrixelemente, findet man z.B. bei (Sta 57) und (Hos 68).

2.4 *Parametrisierung der S-Matrix durch Streuphasen*

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargestellt, wie aus dem Nukleon-Nukleon-Potential die S-Matrix, daraus die M-Matrix und damit die Observablen berechnet werden können. Zum Testen eines Potentialmodells ist es jedoch umständlich, die gemessenen Observablen direkt mit den theoretisch berechneten Größen zu vergleichen. Die Schnittstelle zwischen Theorie und Experiment ist vielmehr die S-Matrix, die sämtliche Informationen enthält, die aus einem Streuexperiment gewonnen werden können. Bei elastischer Streuung im Niederenergiebereich ist die S-Matrix unitär, aufgrund der Zeitumkehrinvarianz ist sie symmetrisch (Gol 64). Für die diagonalen Untermatrizen der S-Matrix (siehe Kap. 2.2) bedeutet dies, daß deren Elemente komplexe Zahlen vom Betrag eins sind und daher durch einen reellen Parameter δ_{LJ} gemäß der Gleichung

$$S_{LL}^{JS} = e^{2i\delta_{LJ}}$$

bestimmt sind. Die Streuphasen δ_{LJ} haben eine anschauliche Bedeutung als Phasenverschiebung zwischen den Radialfunktionen der einfallenden Welle und der Streuwelle in der asymptotischen Zone. Bei verschwindendem Wechselwirkungspotential sind die Streuphasen definitionsgemäß Null.

Für die nichtdiagonalen 2x2-Untermatrizen der S-Matrix sind in der Literatur verschiedene Parametrisierungen gebräuchlich. Eine auch auf größere Matrizen anwendbare Parametrisierung wurde von Blatt und Biedenharn (Bla 52) angegeben. Im Fall der Proton-Proton-Streuung ist jedoch die Stappsche Behandlung der S-Matrix üblich (Sta 57). Sie hat den Vorteil der besseren physikalischen Interpretierbarkeit der Parameter.
Jede unitäre, symmetrische 2x2-Matrix läßt sich durch 3 reelle Parameter eindeutig festlegen. Nach Stapp wählt man die Zahlen $\delta_{J-1,J}$, $\delta_{J+1,J}$ und ε_J so, daß die Matrixgleichung

$$\underline{\underline{S}}^{JT} = \underline{\underline{\delta}}^{J} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{J} \cdot \underline{\underline{\delta}}^{J} \qquad (23)$$

erfüllt ist, wobei folgende Definitionen gelten:

$$\underline{\underline{S}}^{JT} := \begin{bmatrix} S^{J,1}_{J-1,J-1} & S^{J,1}_{J-1,J+1} \\ S^{J,1}_{J+1,J-1} & S^{J,1}_{J+1,J+1} \end{bmatrix} ,$$

$$\underline{\underline{\delta}}^{J} := \begin{bmatrix} e^{i\delta_{J-1,J}} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_{J+1,J}} \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{J} := \begin{bmatrix} \cos(2\varepsilon_J) & i\cdot\sin(2\varepsilon_J) \\ i\cdot\sin(2\varepsilon_J) & \cos(2\varepsilon_J) \end{bmatrix}$$

Wenn $\underline{\underline{S}}^{JT}$ diagonal ist, sind die Parameter ε_J Null und die Streuphasen $\delta_{J-1,J}$, $\delta_{J+1,J}$ entsprechen der üblichen Definition. Die ε_J nennt man Mischungsparameter, da sie ein Maß für die Nichterhaltung des Bahndrehimpulses sind. Die hier eingeführten Parameter nennt man gemäß ihrer ursprünglichen Kennzeichnung mit einem Querstrich auch "bar"-Streuphasen.

Die Partialwellenentwicklung der S-Matrix konvergiert umso schneller, je kurzreichweitiger die Wechselwirkung und je kleiner die Einschußenergie ist. Im Proton-Proton-System ist jedoch das langreichweitige Coulomb-Potential wirksam. Daher

sind die oben definierten Streuphasen auch für große Drehimpulse L von Null verschieden. Man spaltet daher das Potential V in einen langreichweitigen elektromagnetischen Anteil und einen kurzreichweitigen hadronischen Anteil auf. Der erste Anteil setzt sich zusammen aus dem Coulomb-Potential zwischen punktförmigen Ladungen und verschiedenen elektromagnetischen Korrekturen, von denen im Energiebereich um 10 MeV die Vakuumpolarisation (Dur 57) den größten Beitrag liefert. Die Wechselwirkung der magnetischen Momente der beiden Nukleonen, die bei höheren Energien eine Rolle spielt, kann demgegenüber vernachlässigt werden (Ima 81). Auch andere Korrekturen, wie der Einfluß der endlichen Ausdehnung der Nukleonen, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Nach Heller (Hel 60) bezeichnet man die Summe aus Coulomb-Potential und Vakuumpolarisationspotential als elektrisches Potential $V_E = V_{Coul} + V_{VP}$. Bezeichnet man mit $\underline{\underline{S}}_E$ bzw. $\underline{\underline{S}}_{Coul}$ die S-Matrix, die sich bei alleiniger Anwesenheit des elektrischen bzw des Coulomb-Potentials ergibt, so läßt sich die S-Matrix für das Gesamtpotential folgendermaßen aufspalten:

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}_E) + (\underline{\underline{S}}_E - \underline{\underline{S}}_{Coul}) + \underline{\underline{S}}_{Coul}$$

Mit Hilfe der GL. (11) und (12) aus Kap. 2.2 lassen sich die einzelnen Terme auf der rechten Seite berechnen. Diese Aufspaltung hat folgenden Vorteil: Für große Bahndrehimpulse L verschwindet die Radialfunktion im Bereich des kurzreichweitigen Kernpotentials. Daher sind im Term $\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}_E$ nur die Elemente mit kleinem L von Null verschieden; die Partialwellenentwicklung konvergiert schnell. Für die beiden anderen Terme in obiger Gleichung trifft dies nicht zu. Hier ist jedoch das zugrunde liegende Potential exakt bekannt und man kann geschlossene Ausdrücke für die entsprechenden Matrixelemente angeben. Die Matrix $\underline{\underline{S}}_{Coul}$, die sich bei ausschließlicher Anwesenheit des Coulomb-Potentials V_{Coul} ergibt, ist diagonal und besitzt die nur von L abhängigen Elemente $\exp(2i\delta_L)$, wobei

$$\delta_L = \arg \Gamma(L + 1 + i\eta)$$

die Coulomb-Streuphasen sind. Γ ist die Gammafunktion, $\eta = e^2/\hbar v$ ist der relativistische Coulomb-Parameter mit e = Elementarladung und v = Geschwindigkeit des Projektils im Laborsystem.
Die aus $\underline{\underline{S}}_{Coul}$ gemäß Gl. (14) berechnete M-Matrix ist die Einheitsmatrix mal der Coulomb-Streuamplituden

$$f_{Coul}(\Theta) = e^{2i\sigma_0} \cdot \frac{-\eta}{2k \cdot \sin^2(\Theta/2)} \cdot e^{-i\eta \cdot \ln(\sin^2(\Theta/2))}$$

Die Vakuumpolarisationsstreuphasen τ_L sind als Änderung der Coulomb-Phase beim Hinzufügen des Potentials V_{VP} definiert, d.h. die Matrixelemente der aus dem elektrischen Potential V_E berechneten, ebenfalls diagonalen S-Matrix $\underline{\underline{S}}_E$ sind gegeben durch $\exp(2i(\sigma_L + \tau_L))$. Näherungsausdrücke für die τ_L werden in Kap. 2.5 hergeleitet. Der Beitrag von $(\underline{\underline{S}}_E - \underline{\underline{S}}_{Coul})$ zur M-Matrix ist die Vakuumpolarisationsstreuamplitude $f_{VP}(\Theta)$. Eine Näherungsformel hierfür stammt von Durand (Dur 57) und ist im nächsten Abschnitt angegeben.

Die nuklearen elektrischen Streuphasen δ^E_{LJ} werden schließlich als Änderung der Streuphasen beim Hinzufügen des reinen Kernpotentials zum elektrischen Potential definiert. Die Elemente der diagonalen Untermatrizen von $\underline{\underline{S}}$ haben dann die Gestalt $\exp(2i(\sigma_L + \tau_L + \delta^E_{LJ}))$. Die nichtdiagonalen Untermatrizen sind durch Gl. (23) gegeben mit $\delta_{LJ} = \sigma_L + \tau_L + \delta^E_{LJ}$ und $\varepsilon_J = \varepsilon^E_J$.

Vom theoretischen Standpunkt aus ist es manchmal sinnvoll, mit den Coulomb-Kernstreuphasen δ^C_{LJ} zu rechnen (siehe Kap. 2.6). Diese sind definiert als die Streuphasenänderung beim Hinzufügen des Kernpotentials zum Coulomb-Potential. Der Unterschied zu den elektrischen Kernstreuphasen ist nur gering (She 70).

Schließlich seien noch die Streuphasen $K_{LJ} := \tau_L + \delta^E_{LJ}$ erwähnt (Hel 60). Der Unterschied zu den δ^C_{LJ} besteht darin, daß hier die Summe aus Vakuumpolarisationspotential und Kernpotential statt nur dem Kernpotential als Korrektur zum Coulomb-Potential betrachtet wird.

Im allgemeinen ist der Zusammenhang zwischen dem Kernpotential und den zugehörigen Streuphasen sehr unanschaulich. Falls jedoch das Kernpotential gemäß Gl. (2) gegeben ist, lassen sich aus bestimmten Linearkombinationen der Triplett-P-Streuphasen qualitative Aussagen über die einzelnen Potentialterme machen. Unter der Bedingung, daß die Bornsche Näherung gültig ist und der Mischungsparameter ε_2^E vernachlässigt werden kann, erhält man für die S-Matrixelemente zu L=1 aus Gl. (11) den Ausdruck

$$e^{2i(\sigma_1+\tau_1+\delta_{1J}^E)} - e^{2i(\sigma_1+\tau_1)} = -2i\cdot\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\cdot\int_0^\infty V_{11}^{J1}(r)\cdot\left(v_{11}^{J1}(kr)\right)^2 dr$$

Berücksichtigt man, daß die δ_{1J}^E sehr klein sind und spaltet die Matrixelemente V_{11}^{J1} in Zentral-, Spin-Bahn- und Tensoranteil auf, so folgt

$$\delta_{1J}^E \approx \frac{2\mu}{\hbar^2 k}\cdot\sum_{i=C,LS,T} c_{iJ}\int_0^\infty \left(e^{-i(\sigma_1+\tau_1)}v_{11}^{J1}(kr)\right)^2\cdot V_i(r)\,dr$$

Die Koeffizienten c_{iJ} entnimmt man den Gleichungen (6), (7) und (8). Dem asymptotischen Verlauf von v_{11}^{J1} (Gl. (9)) kann man entnehmen, daß der Integrand reell ist. Mit der Bezeichnung

$$\Delta_i := \frac{2\mu}{\hbar^2 k}\cdot\int_0^\infty \left(e^{-i(\sigma_1+\tau_1)}v_{11}^{J1}(kr)\right)^2\cdot V_i(r)\,dr \qquad (24)$$

vereinfacht sich dies zu

$$\delta_{1J}^E \approx \sum_{i=C,LS,T} c_{iJ}\cdot\Delta_i \quad , J = 0,1,2$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach den Δ_i auf, erhält man schließlich (Gam 60):

$$\Delta_C = \frac{1}{9}\left(\delta_{10} + 3\delta_{11} + 5\delta_{12}\right)$$

$$\Delta_{LS} = \frac{1}{12}\left(-2\delta_{10} - 3\delta_{11} + 5\delta_{12}\right)$$

$$\Delta_T = \frac{5}{72}\left(-2\delta_{10} + 3\delta_{11} - \delta_{12}\right)$$

Aus der Definition (24) dieser Streuphasenkombinationen folgt, daß man aus Größe und Vorzeichen der Δ_i auf die Stärke und das Vorzeichen des jeweiligen Potentialterms im Bereich des Maximums der radialen Wellenfunktion schließen kann. Bei der Einschußenergie 12 MeV ist man dabei nur auf den langreichweitigen Anteil des Kernpotentials sensitiv. Anziehende Potentiale führen zu positiven, abstoßende Potentiale zu negativen Streuphasenkombinationen. Falls die drei P-Streuphasen gleich groß sind, verschwinden die Kombinationen Δ_{LS} und Δ_T. Umgekehrt sind die nichtzentralen Anteile der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung für eine Aufspaltung der P-Streuphasen verantwortlich.

2.5 Vakuumpolarisation

Wie in Abschnitt 2.4 erläutert wurde, benötigt man zur Behandlung der Vakuumpolarisation in der Streuphasenanalyse ähnlich wie bei der Coulomb-Wechselwirkung sowohl die entsprechende Streuamplitude als auch die Streuphasen selbst. Eine genaue, aber aufwendige Berechnung der Streuphasen für L=0 und L=1 wurde von Sher (She 70) bei mehreren Energien bis 11,4 MeV durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit Näherungsformeln, die von Durand (Dur 57) für L=0 und von Eriksen (Eri 56) für L=1 angegeben wurden. Die Methode von Durand wurde daher als Grundlage genommen, um entsprechende Formeln für L>1 zu erhalten.
Betrachtet man das Vakuumpolarisationspotential $V_{VP}(r)$ (Ueh 35) als Korrektur des Coulombpotentials $V_C(r)$, so erhält man die Streuphase τ_L zum Bahndrehimpuls L aus der Gl. (11) des letzten Abschnitts, die in diesem Fall lautet:

$$e^{2i(\sigma_L+\tau_L)} - e^{2i\tau_L} = -2i\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty v_{LL}^{JS}(kr)\cdot V_{VP}(r)\cdot u_{LL}^{JS}(kr)\,dr$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen von Abschnitt 2.2. Das Vakuumpolarisationspotential V_{VP} ist in erster Ordnung der Feinstrukturkonstanten α gegeben durch (Sch 49):

$$V_{VP}(r) = \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{e^2}{r}\int_1^\infty e^{-2mc/\hbar\cdot rx}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$$

(e: Elementarladung, c: Lichtgeschwindigkeit, m: Elektronen-

ruhemasse)
Da die τ_L sehr klein sind, ist die linke Seite ungefähr gleich $2i\tau_L \cdot \exp(2i\sigma_L)$. Ersetzt man im Rahmen der Bornschen Näherung $u^{JS}_{LL}(kr)$ durch $v^{JS}_{LL}(kr)$ und benutzt man die reguläre sphärische Coulombfunktion

$$\mathcal{F}_L(kr) = e^{-i\sigma_L} \cdot v^{JS}_{LL}(kr) \ ,$$

so ergibt sich

$$\tau_L \approx -\frac{2\mu}{\hbar^2 k} \cdot \int_0^\infty \mathcal{F}_L(kr)^2 \cdot V_{VP}(r)\, dr$$

Um das Problem mathematisch weiter zu vereinfachen, wurden die $\mathcal{F}_L$ durch die Radialfunktionen für freie Teilchen ersetzt, d.h. durch sphärische Besselfunktionen. Durand hat gezeigt, daß der dadurch verursachte Fehler für τ_0 bei E = 4 MeV nur 4% beträgt und für große Energien und höhere Drehimpulse kleiner wird. In dieser Näherung wird dann

$$\tau_L \approx -\frac{\alpha\eta}{3\pi} \cdot \int_0^1 (1 + \frac{x}{2})\sqrt{1 - x}\, \frac{1}{x}\, Q_L(1 + \frac{\nu}{x})\, dx$$

($\eta = e^2/\hbar v$: Coulombparameter, v: Laboreinlaufgeschwindigkeit, $\nu = 4m^2c^2/ME$ mit M: Protonenmasse, E: Laboreinschußenergie, Q_L: Legendrefunktionen zweiter Art (Abr 65)).

Das Integral, das im folgenden mit I bezeichnet wird, ist nicht elementar auswertbar. Ferner muß man beachten, daß für $x \to 0$ der Term 1/x sehr groß wird, während Q_L gegen Null geht und für $x \to 1$ Q_L sehr große Werte annimmt, aber dafür 1-x gegen Null strebt. Daher wird das Integrationsintervall aufgespalten und jedes Teilintervall separat behandelt.
Für die Auswertung des Integrals benötigt man folgende Reihenentwicklungen:

$$(1+x/2)\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \ , \quad |x| \leq 1$$

$$Q_L(x) = \sum_{n=L+1}^{\infty} {}^{\perp}C_n x^{-n} \ , \ {}^{\perp}C_{L+2} = {}^{\perp}C_{L+4} = \ldots = 0 \ , \ x > 1$$

$$Q_L(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^{\perp}A_n x^n\right) \cdot \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\perp}B_n x^n \ , \ -2 < x \leq 2$$

Die Koeffizienten a_n können sofort aus der Reihenentwicklung der Wurzel berechnet werden. Die Zahlen ${}^{\perp}A_n$, ${}^{\perp}B_n$ und ${}^{\perp}C_n$ er-

geben sich rekursiv aus den entsprechenden Zahlen mit kleinerem L, wenn man die Rekursionsrelationen der Q_L benutzt. Die Entwicklung des Integrals I nach der kleinen Zahl ν soll nun kurz skizziert werden:
Nach Aufspaltung des Integrationsintervalls und entsprechender Substitution der Variablen erhält man $I = I_1 + I_2$ mit

$$I_1 = \int_2^\infty \left(1 + \frac{\nu/2}{z-1}\right)\sqrt{1 - \frac{\nu}{z-1}} \cdot \frac{1}{z-1}\, Q_L(z)\, dz$$

$$I_2 = \int_\nu^1 \left(1 + \frac{\nu}{2\cdot z}\right)\sqrt{1 - \frac{\nu}{z}} \cdot \frac{1}{z}\, Q_L(1+z)\, dz$$

Auswertung von I_1:
Man kann den Integranden und damit I_1 sofort in eine Potenzreihe nach ν entwickeln und erhält als konstantes Glied:

$$\int_2^\infty \frac{1}{z-1}\, Q_L(z)\, dz$$

Der nächste Term ist bereits von der Ordnung ν^2. Einsetzen der Entwicklung $Q_L(z) = \Sigma\, {}^{L}C_L z^{-n}$ führt auf Integrale der Form $\int((z-1)z^n)^{-1}dz$, die in geschlossener Form gelöst werden können. Das Ergebnis ist

$$I_1 = \sum_{n=L+1}^{\infty}\left({}^{L}C_L \cdot \sum_{m=n}^{\infty} \nu^{-1}\cdot 2^{-m}\right) + o(\nu^2)$$

Auswertung von I_2:
Einsetzen der entsprechenden Reihenentwicklungen ergibt zunächst

$$I_2 = \int_\nu^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \nu^n/z^n\right) 1/z \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^{L}A_n z^n\right)\ln(z) + \sum_{n=0}^{\infty} {}^{L}B_n z^n\right) dz$$

Vertauscht man Summation und Integration, so treten Integrale der Form $\int z^n dz$ und $\int z^n \ln(z) dz$ mit ganzzahligen n auf. Diese können geschlossen gelöst werden. Die Größe ν tritt dabei in Termen der Gestalt ν^n, $\nu^n \ln(\nu)$ und $\nu^n(\ln(\nu))^2$ mit $n \geq 0$ auf. Nach Zusammenfassen und Umsortieren der Terme erhält man

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{L}B_n/n - \sum_{n=1}^{\infty} {}^{L}A_n/n^2 - 1/2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n/n^2 + {}^{L}B_0 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n/n$$

$$- \left(1/2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n/n + {}^{L}B_0\right)\cdot\ln(\nu) + 1/4\,(\ln(\nu))^2 + o(\nu)$$

Für $I = I_1 + I_2$ und ein bestimmtes L ergibt sich daraus

$$I = {}^{L}c_0 + {}^{L}c_1 \cdot \ln(v) + 1/4\ (\ln(v))^2 + o(v)$$

und damit folgende Näherungsformel für die Streuphase τ_L:

$$\tau_L \approx -\frac{\alpha\eta}{3\pi} \cdot ({}^{L}c_0 + {}^{L}c_1 \cdot \ln(v) + \frac{1}{4}\ (\ln(v))^2)$$

L	${}^{L}c_0$	${}^{L}c_1$
0	0,9037	-0,2064
1	1,4909	0,7936
2	2,5345	1,2936
3	3,5081	1,6269
4	4,3840	1,8769
5	5,1748	2,0769
6	5,8949	2,2436
7	6,5563	2,3865
8	7,1686	2,5115
9	7,7390	2,6226
10	8,2736	2,7226
11	8,7768	2,8135
12	9,2527	2,8968
13	9,7043	2,9737
14	10,1342	3,0452
15	10,5447	3,1118

Tab. 2.1: Entwicklungskoeffizienten der Vakuumpolarisationsstreuphasen.

In Tabelle 2.1 sind die Koeffizienten ${}^{L}c_0$ und ${}^{L}c_1$ für L=0 bis L=15 aufgelistet. Aus der Rechengenauigkeit des verwendeten Computers (CDC Cyber 845 in Double Precision) wurde der maximale Fehler der Koeffizienten ${}^{L}c_n$ abgeschätzt. Er erreicht für L=40 etwa $1 \cdot 10^{-5}$.
In Fig. 2.2 sind die nach obigem Verfahren berechneten τ_L als Funktion der Energie aufgetragen. Man sieht, daß auch für große L die Streuphasen τ_L nicht gegenüber τ_0 vernachlässigbar sind. Deshalb ist es unzweckmäßig, die Vakuumpolarisationsamplitude $f_{VP}(\Theta)$ aus den τ_L zu berechnen. Es wurde stattdessen eine Näherungsformel von Durand (Dur 57) verwendet:

$$\mathrm{Re}\, f_{VP}(\theta) \approx -\frac{\alpha\eta}{3\pi}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\left(-\frac{5}{3}+X+\sqrt{1+X}\left(1-\frac{X}{2}\right)\cdot\ln\frac{\sqrt{1+X}+1}{\sqrt{1+X}-1}\right)$$

$$\mathrm{Im}\, f_{VP}(\theta) \approx \frac{\eta}{1-x}\cdot\frac{\alpha\eta}{3\pi}\cdot\ln\frac{1}{X}\cdot\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\nu}-\frac{3}{2}\ln\frac{2}{1-x}\right)$$

Dabei ist $x = \cos(\theta)$ und $X = \nu/(1-x)$. Die Näherung gilt für $X \ll 1$. Bei einer Einschußenergie von 12 MeV ist z.B. $\nu = 9{,}3\cdot10^{-5}$ und für X ergibt sich bei $\theta_{CM} = 10°$ der Wert 0,006.

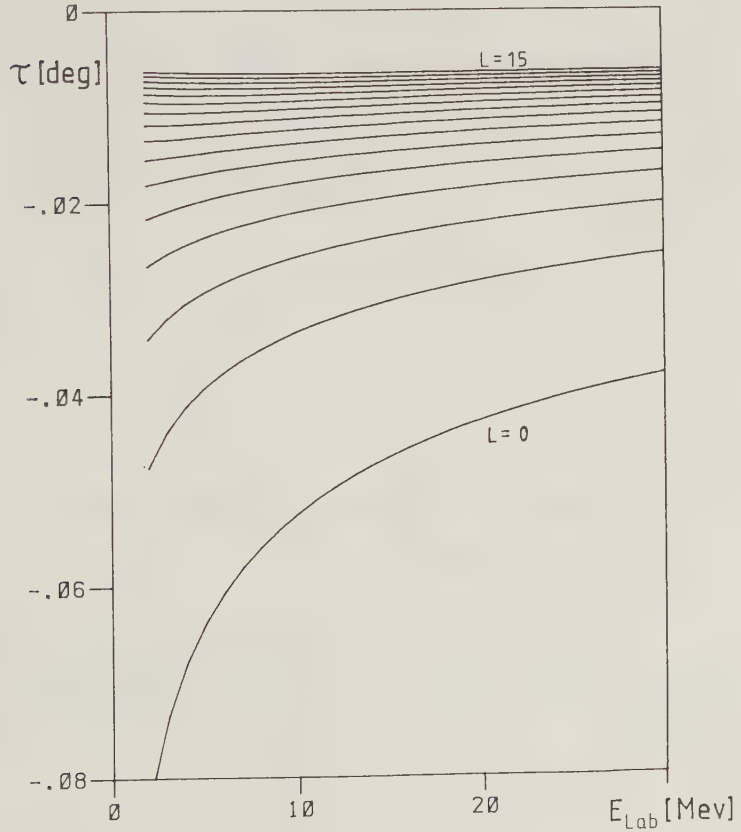

Fig. 2.2: Vakuumpolarisationsstreuphasen als Funktion der Energie. Von unten nach oben sind die Phasen τ_0

2.6 *Energieabhängigkeit der Streuphasen*

Die Energieabhängigkeit der Streuphasen wird für kleine Energien durch die Effektive-Reichweite-Entwicklung beschrieben. Für den Fall einer nur kurzreichweitigen Wechselwirkung ist die aus den Streuphasen δ_{LJ} und der Wellenzahl k gebildete Funktion $k^{2L+1}\cdot\cot(\delta_{LJ})$ in eine Potenzreihe nach k^2 entwickelbar, welche sehr schnell konvergiert. Für das Proton-Proton-System ist dies wegen des langreichweitigen elektrischen Potentialanteils nicht der Fall. Man kann jedoch modifizierte Ausdrücke finden, die eine Reihenentwicklung nach k^2 und damit nach der Einschußenergie erlauben. Heller (Hel 60) hat diese für die elektrischen Streuphasen angegeben, bei Sher (She 70) findet man die mathematisch einfacher zu berechnenden Ausdrücke für die Coulomb-Kernstreuphasen. Im Rahmen dieser Arbeit interessieren dabei nur die L=1-Phasen. Die Effektive-Reichweite-Funktion $J_J(k)$ lautet für diese:

$$J_J(k) = (1 + \eta^2)\cdot k^2\cdot(C_0^2\cdot k\cdot\cot(\alpha_J) + 2k\eta\cdot h(\eta))$$

mit

$$\eta = e^2/\hbar v$$

$$C_0^2 = 2\pi\eta/\exp(2\pi\eta-1)$$

$$h(\eta) = \eta^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\eta^2)} - \ln(\eta) - \gamma,\ \gamma\text{: Eulersche Konstante}$$

$$\alpha_J = \begin{cases} \delta_{1J}^{C} & \text{für J=0 oder J=1} \\ \delta_{12}^{C} - C_0^2\cdot(1+\eta^2)\cdot\delta_{12}^{OPE} & \text{für J=2} \end{cases}$$

Für J=2 wird der Beitrag vom Ein-Pion-Austausch abgezogen, da dieser die Funktion $J_2(k)$ bei k=0 singulär machen würde. Die Reihenentwicklung von $J_J(k)$ schreibt man üblicherweise in der Form

$$J_J(k) = -1/a_{1J} + 1/2\ r_{1J}k^2 - P_{1J}r_{1J}^3k^4 + Q_{1J}r_{1J}^5k^6 + \ldots$$

Der Parameter a_{1J} ist die Streulänge, r_{1J} ist die effektive Reichweite und P_{1J} sowie Q_{1J} sind formabhängige Parameter.

Die Brauchbarkeit dieser Entwicklung folgt aus der Erfahrung, daß für Energien bis etwa 30 MeV der Verlauf annähernd linear ist. In diesem Energiebereich wird also jede Streuphase durch nur 2 Parameter (a und r) vollständig beschrieben. Streuexperimente, die bei verschiedenen Energien durchgeführt wurden, lassen sich gemeinsam analysieren, wenn nicht die Streuphasen, sondern die Effektive-Reichweite-Parameter als freie Parameter verwendet werden.

3 Experiment

3.1 Allgemeines

Bei der Messung der Analysierstärke in der Proton-Proton-Streuung müssen wegen der kleinen Effekte und der angestrebten großen Meßgenauigkeit von $\approx 8 \cdot 10^{-5}$ hohe Anforderungen an die verwendete Meßapparatur gestellt werden. Deshalb wurde das Erlanger fensterlose Gastarget am EN-Tandem der ETH Zürich installiert.
Die dort vorhandene Atomstrahl-Protonenquelle liefert einen Targetstrom von typisch 500 nA bei etwa 75% Polarisation. Die Strahlpolarisation ist dabei homogen über dem Strahlquerschnitt verteilt. Eine periodische Spinumschaltung mit ca. 1 Hz Umschaltfrequenz dient zusammen mit der in 3.3 beschriebenen Doppelzähleranordnung zur Eliminierung apparativer Asymmetrien. Strahlfleckschwankungen, die mit der Spinumschaltung korreliert sind, können bei der Züricher Atomstrahlquelle praktisch vernachlässigt werden, da der Spin an neutralen Atomen gedreht wird. Experimentelle Untersuchungen ergaben eine obere Grenze von 1 µm für die seitliche Verschiebung des Strahls beim Umschalten der Polarisation (Els 84). Der Beitrag zum Analysierstärkefehler ist daher um mindestens eine Größenordnung kleiner als der statistische Fehler. Der auf 12 MeV beschleunigte Protonenstrahl gelangt durch ein 50 cm langes, mit 4 strahldefinierenden Blenden von je 3 mm Durchmesser bestücktes Kollimatorrohr auf das Target. Die Messung des Targetstroms erfolgt in einem Faraday-Cup hinter der Streukammer. Ein Teil des Stroms gelangt durch ein 1 mm großes Loch im Boden des Cups in ein ^{4}He-Polarimeter. Dort wird mit zwei unter $\pm 112{,}5°$ aufgestellten Halbleiterzählern die Strahlpolarisation während der Messung überwacht. Zur Verringerung des Untergrundes in den Polarimeterspektren ist der Boden des Faraday-Cups mit 5 cm Blei abgeschirmt.

3.2 Fensterloses Gastarget

Die Messungen wurden mit dem Erlanger fensterlosen Gas-Jet-Target durchgeführt, das auf einen Vorschlag von J. Ulbricht

et al. (Ulb 72) hin entwickelt wurde. Die erste im Dauerbetrieb einsetzbare Version der Apparatur ist von G. Bittner (Bit 79a) aufgebaut worden. In diesem Abschnitt wird der neueste Stand des Gastargets beschrieben.

In Fig. 3.1 ist die Targetzone im Querschnitt abgebildet. Unter einem Druck von ca. 20 bar wird nachgereinigter Wasserstoff von oben einer Düse zugeführt. Das Gas strömt mit Überschallgeschwindigkeit ins Vakuum und wird in einem darunter befindlichen besonders angepaßten Auffänger abgepumpt (Pumpraum P_1). Der Gasstrahl zwischen Düse und Auffänger dient als Target. Stimmt man Einlaßdruck, Düsen- und Auffängergeometrie und den Abstand zwischen Düse und Auffänger genau aufeinander ab, so erreicht man, daß der seitliche Gasanfall sehr klein wird. Er wird durch ein differentielles Pumpsystem, das aus den Pumpräumen P_I, P_{II} und P_{III} besteht, abgepumpt. Bei dem verwendeten Einlaßdruck von ca. 20 bar und einem Abstand von 5 mm zwischen Düse und Auffänger ergeben sich die besten Verhältnisse bei einer 5° konischen Düse mit kleinstem Innendurchmesser von 0,6 mm, einer Länge von 8 mm und einem Durchmesser von 2,9 mm am Düsenmund. Der optimale Durchmesser des Auffängers beträgt 7 mm (Sch 78). Die effektive Targetdichte ist dann ca. 5 $\mu g/cm^2$ bei einem mittleren Gasstrahldurchmesser von 4 mm. Dies entspricht einem statischen Druck von etwa 150 mbar.

Tests ergaben, daß diese Parameter nur für reinen Wasserstoff gelten und daß sich das Strömungsverhalten bereits bei geringen Verunreinigungen mit Luft deutlich verbessert. Je größer der Luftgehalt ist, umso größer ist der Auffänger zu wählen und umso geringer wird der seitliche Gasanfall. Diese Betriebsweise wurde jedoch nicht näher untersucht, da sie insbesondere bei den Vorwärtsstreuwinkeln zu einem starken Anstieg des Untergrundes aufgrund elastischer Streuung an der Gasbeimengung führt. Bei den Messungen wurde daher mit nachgereinigtem Wasserstoff gearbeitet und darauf geachtet, daß die Gasverunreinigungen stets unter 0,1 Vol.% blieben. In Kap.4 wird darauf noch näher eingegangen. Eine weitere Quelle für den Untergrund in den Spektren ist die Streuung an Düse und Auffänger. Diese Teile sind deshalb während des Betriebs in der Höhe von außen verstellbar, so daß man ei-

nerseits den Ort der größten Targetdichte direkt unterhalb der Düse ausnutzen kann und andererseits noch kein Anstreifen des einfallenden Tandemstrahls erfolgt. Eine spezielle Formgebung trägt ebenfalls zur Reduzierung der Streuung bei.

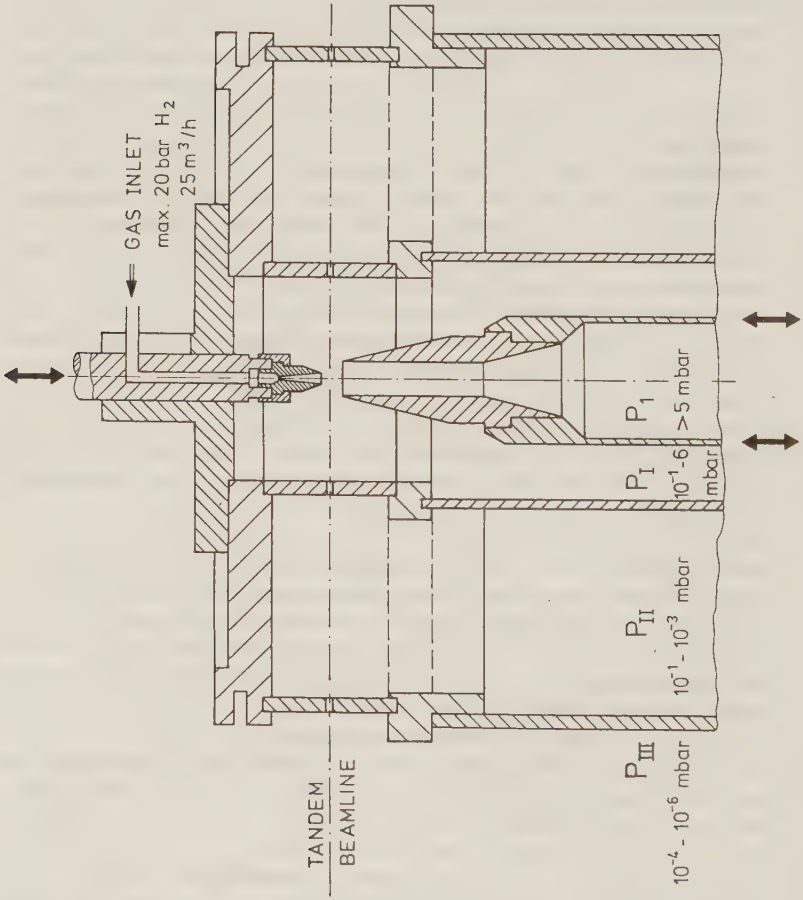

Fig. 3.1: Targetzone des fensterlosen Jet-Gastargets mit differentiellem Pumpsystem.

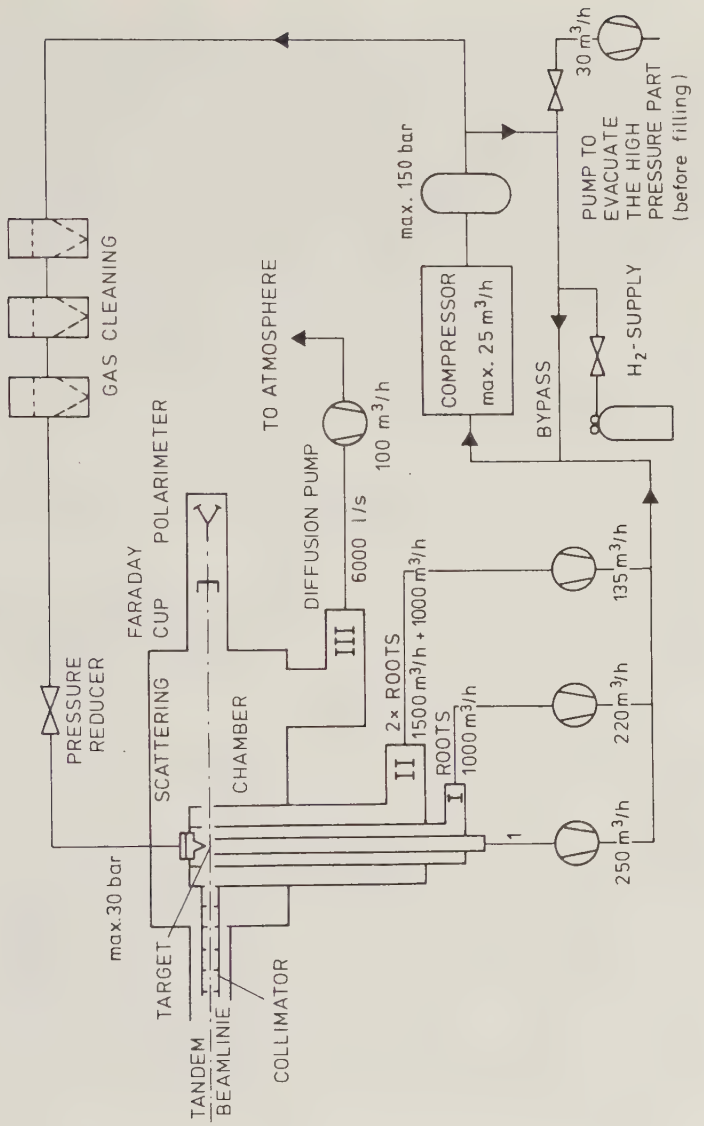

Fig. 3.2: Gesamtanordnung des fensterlosen Gastargets.

In Fig. 3.2 ist die gesamte Anordnung schematisch dargestellt. Der Gasanfall der Pumpräume P_I, P_{II} und P_{III} gelangt über eine Sperrschieberpumpe bzw. über Rootspumpstände in die Ansaugleitung eines 3-stufigen Kompressors mit 25 Nm^3/h Durchsatz. Die Pumpstände müssen auspuffseitig immer gegen Atmosphärendruck arbeiten. Daher muß ein Teil des komprimierten Gases über eine Bypassleitung und zwei Druckminderstufen an den Kompressoreingang zurückgeführt werden. Der Rest wird in einer Filterkette gereinigt und gelangt über einen Druckminderer und ein Nadelventil wieder zur Düse. Damit ergibt sich ein fast geschlossener Gaskreislauf. Lediglich das von einer 6000 l/s-Öldiffusionspumpe aus der Streukammer (Pumpraum P_{III}) geförderte Gas wird direkt in die Atmosphäre abgegeben. Das Gastarget läßt sich damit ca. 1 Tag ohne Nachfüllen betreiben.

Die beschriebenen Eigenschaften des fensterlosen Gastargets zeigen einige für die P-P-Streuung entscheidende Vorteile gegenüber einer Gaszelle:

1) Außerhalb der Targetzone tritt kein Energieverlust im Gas oder an Austrittsfolien auf. Daher lassen sich auch bei relativ hoher Targetdichte die z.T. sehr niederenergetischen Rückstoßprotonen nachweisen, was eine Koinzidenzmessung auch für extreme Vorwärtswinkel erlaubt.

2) Die bei kleinen Streuwinkeln aufgestellten Detektoren können keine an Eintrittsfolien gestreuten Teilchen sehen.

3) Wegen des räumlich eng begrenzten Streuortes können nur die unter einem bestimmten Winkel gestreuten Protonen in einen Detektor gelangen. Geometrische Korrekturen der Messung aufgrund einer endlichen Targetzone sind daher nicht notwendig. Größere akzeptierte Streuwinkelbereiche würden aufgrund der Kinematik auch zu einer Peakverbreiterung in den Energiespektren führen, was eine energetische Abtrennung der an Verunreinigungen gestreuten Protonen erschwert. Dies ist jedoch nur für diejenigen Winkel wichtig, bei denen ohne Koinzidenz gemessen wird.

3.3 Detektoranordnung

Die verwendeten Detektoren mit den zugehörigen Blendensystemen sind in einem sog. Streueinsatz zusammengefaßt, der auf der Grundlage eines bereits vorhandenen Streueinsatzes (Geb 83) aufgebaut und den Erfordernissen der Koinzidenzmeßtechnik (s. u.) angepaßt wurde. Die in Fig. 3.3 gezeigte Detektoranordnung erlaubt die gleichzeitige Messung bei den 7 Streuwinkeln ±5°, ±10°, ±15°, ±20°, ±27,5°, ±35° und ±42,5°. Die Detektoren sind in je einem Block links und rechts untergebracht. Die Blöcke sind um 2,5° nach hinten verschiebbar, wodurch eine zweite Winkelstellung von 7,5° bis 45° gemessen werden kann. Zusätzlich ist unter 160° ein Detektor als Monitor für Gasverunreinigungen eingebaut.
Bei der Auswahl der Detektoren ist zu berücksichtigen, daß sie insbesondere während der Strahloptimierung vor Beginn der eigentlichen Messung einer hohen Zählratenbelastung aus Protonen, Neutronen und Gammaquanten ausgesetzt sind. Diese Teilchen stammen aus elastischer Streuung bzw. Reaktion beim Anstreifen des einfallenden Protonenstrahls an Düse, Auffänger und Blenden und werden hauptsächlich in Vorwärtsrichtung emittiert. Statt mit Halbleiterzählern sind daher die 4 kleinsten Streuwinkel mit Szintillatoren NE102a der Dicke 1 mm bestückt; die Lichtimpulse werden mit Photomultipliern des Typs Hamamatsu R980 nachgewiesen. Die Photoröhren ragen aus Platzgründen um abwechselnd 20° nach oben und unten aus der Streuebene heraus (Fig. 3.4). Zur Unterdrückung des Untergrunds durch neutrale Teilchen sind die Zähler für 5° und 10° mit jeweils 0,2 mm dicken ΔE-Szintillatoren in Koinzidenz geschaltet. Die dazugehörigen Photomultiplier sind vom Typ Hamamatsu R647-1. Die Blenden vor den Detektoren sind so gewählt, daß die Zählrate bei allen Streuwinkeln etwa gleich groß wird. Wir benutzten kreisförmige Blenden mit Durchmesser 4,5 mm bei 5°, 9 mm bei 7,5° und 11 mm bei $10° \leq \Theta_{Lab} \leq 22,5°$. Der Abstand zum Target betrug 30 cm. Das ergibt akzeptierte Raumwinkel von 0,2 – 1,1 msr.
Mit Szintillatoren ist bei kleinen Streuwinkeln keine energetische Trennung zwischen den an Wasserstoff und den an Gasverunreinigungen gestreuten Protonen möglich. Deshalb werden die zwischen 5° und 22,5° gestreuten Protonen in Koinzidenz mit den entsprechenden Rückstoßprotonen gemessen.

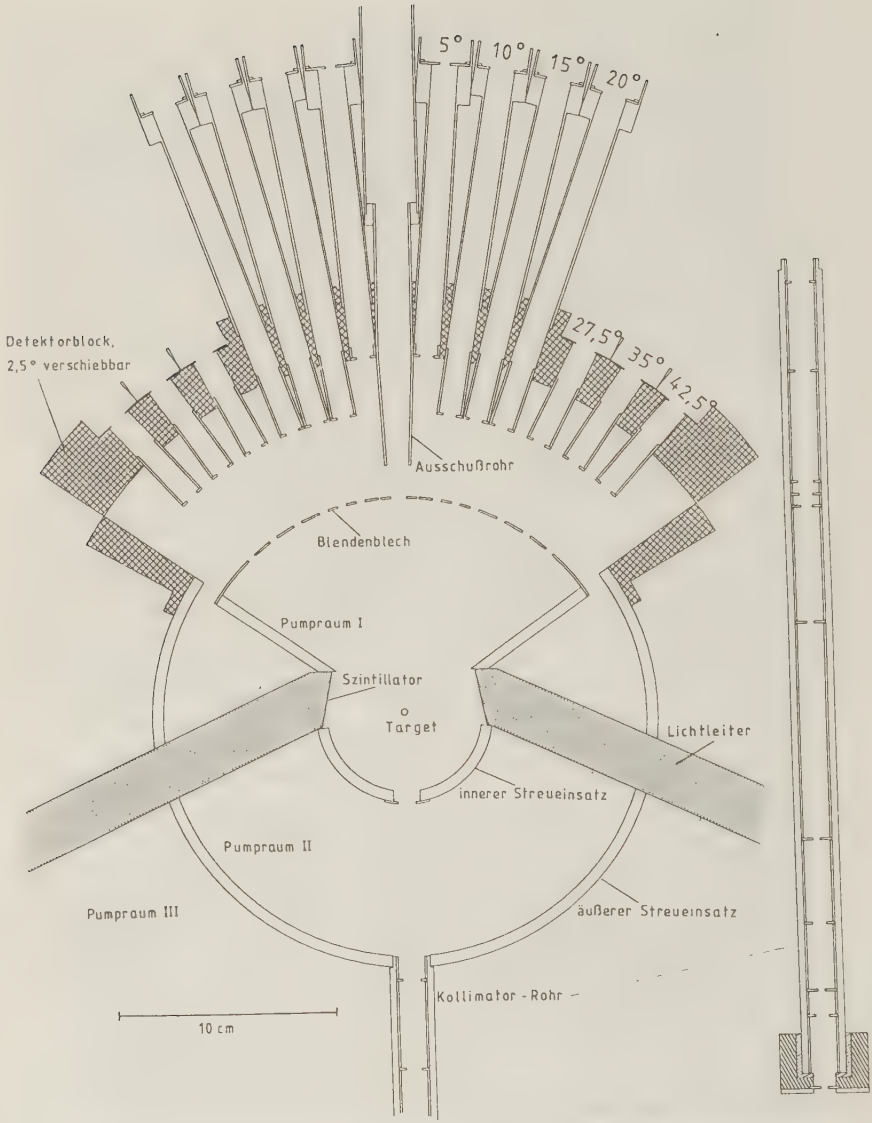

Fig. 3.3: Detektoranordnung des fensterlosen Jet-Gastargets.

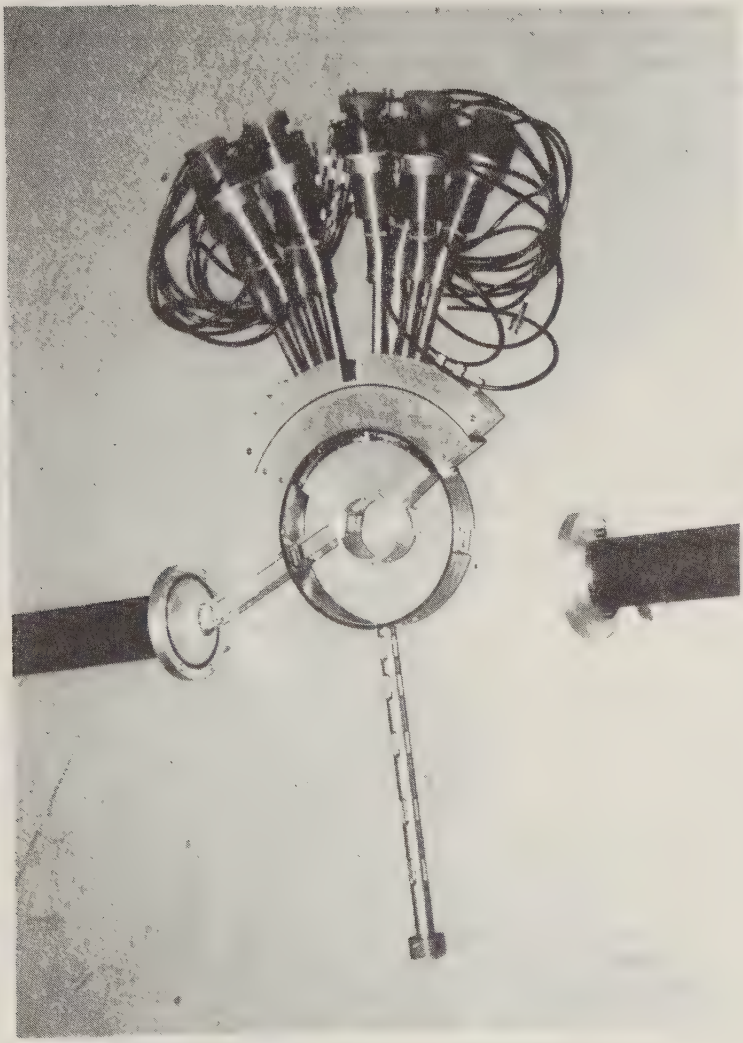

Fig. 3.4: Ansicht des verwendeten Streueinsatzes mit aufgesteckten Detektoren.

In nichtrelativistischer Näherung stehen die Impulse der beiden gestreuten Protonen aufeinander senkrecht. Wegen der Impulserhaltung muß die durch sie aufgespannte Ebene den einfallenden Strahl enthalten. In Fig. 3.5 ist dies schematisch dargestellt. Die Streuebene ist durch das schraffierte Rechteck gekennzeichnet. Man erkennt, daß für kleine Streuwinkel Θ ein kleiner vertikaler Streuwinkel Φ genügt, um die Streuebene sehr stark zu kippen. Der Effekt ist umso größer, je kleiner der Streuwinkel Θ ist. Die Rückstoßprotonen werden dann in einen großen Raumwinkelbereich gestreut. Man muß daher den Detektor für diese Protonen sehr nahe am Target anbringen. In unserem Fall wurde ein 24x24 mm² großer Szintillator (NE102a) der Dicke 0,2 mm in 35 mm Abstand vom Streuzentrum gewählt. Da bei diesem Abstand benachbarte Streuwinkel nicht mehr getrennt werden können, wurden die Rückstoßprotonen zu allen 4 Streuwinkeln mit einem gemeinsamen Szintillator nachgewiesen. Das Licht wurde über einen 30 cm langen Plexiglas-Lichtleiter aus der Streukammer geführt und in einen schnellen Photomultiplier des Typs Valvo XP2020 gekoppelt.

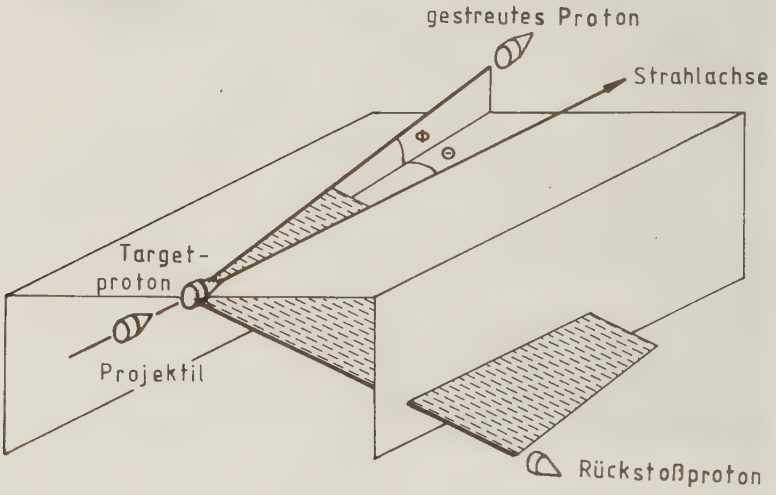

Fig. 3.5: Zur Kinematik der Proton-Proton-Streuung.

Die Kontur der Blende vor dem Szintillator wurde der berechneten Emittanz der Rückstoßprotonen angepaßt. Eine mit einem Plotter erstellte Zeichnung diente als Vorlage für die Herstellung der Blende. In die Berechnung gingen die Einschußenergie, die Geometrie der Blenden an den Vorwärtsdetektoren und die Ausdehnung des Targetvolumens (Gasstrahldurchmesser 4 mm, Tandemstrahldurchmesser 3 mm) ein. Dabei wurde die relativistische Reaktionskinematik berücksichtigt. In Fig. 3.6 ist das Ergebnis für die 7,5°-Winkelstellung abgebildet. Man erkennt den Überlapp zwischen benachbarten Streuwinkeln. Dieser Überlapp zwingt dazu, mehrere Winkel mit einem gemeinsamen Detektor zu messen.

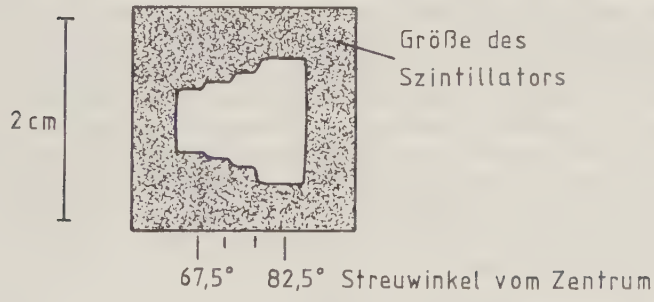

Fig. 3.6: Blende für Rückstoßprotonen; 7,5°-Winkelstellung.

Die Streuwinkel $\Theta_{Lab} \geq 27{,}5°$ wurden ohne Koinzidenz mit 1000 µm dicken Silizium-Oberflächensperrschichtdetektoren gemessen. Der akzeptierte Raumwinkel der Detektoren ist ca. 1,1 msr. Ein in 100 mm Entfernung vom Target angeordnetes Blendenblech dient gleichzeitig als Kollimator und als Trennung zwischen den Pumpräumen P_I und P_{II}. Im Raum P_{II} sind noch Antistreublenden mit jeweils 6 mm Durchmesser angebracht. Sämtliche Blenden sind aus 1 mm dickem Edelstahlblech gefertigt, außer den strahldefinierenden Tantal-Blenden des Einschußkollimators.

3.4 *Datenaufnahme*

Die Signale der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Detektoren werden gemäß dem Elektronik-Blockschaltbild Fig. 3.7 bzw. 3.8 verarbeitet. Die in Fig. 3.7 gezeigten Photomultiplier R980 werden mit -1000 V Kathodenspannung versorgt und liefern dann Anodenpulse mit ca. -0,6 V Höhe und 30 ns Halbwertsbreite. Die Pulse werden verzögert und in je einen Zeit- und Energiezweig gesplittet. Das Zeitsignal wird von einem Leading-Edge-Diskriminator abgenommen und einer Koinzidenzstufe zugeführt. Die entsprechenden Rückstoßereignisse werden mit einer XP2020 Photoröhre gemessen. Da ein Rückwärtsdetektor zu 4 Vorwärtsdetektoren gehört, wird das Signal verstärkt und aufgezweigt. Bei -2000 V Betriebsspannung sind die Pulse dann 10 ns breit und je nach Streuwinkel -20 bis -200 mV hoch. Sie gelangen über einen Diskriminator, der Ereignisse mit zu kleiner Energie verwirft, in die Koinzidenzstufe. Für die Detektorzweige 5° und 10° ist zusätzlich ein Diskriminator vorgesehen, dessen Ausgang in Antikoinzidenz zu den anderen Diskriminatoren geschaltet ist und die Funktion einer oberen Schwelle übernimmt. Ferner ist der ΔE-Detektor R647-1 vorhanden, der für 5° und 10° eine zusätzliche Koinzidenzbedingung schafft. Er wird mit -1100 V Kathodenhochspannung betrieben und liefert Pulse mit -0,3 V Höhe und 10 ns Breite.

Die Ausgangspulsbreite der Diskriminatoren beträgt 10 ns für die koinzidenten Signale und 30 ns für das Antikoinzidenzsignal bei der oberen Schwelle. Die Zahl der koinzidenten Ereignisse wird in einem CAMAC-Scaler gezählt und periodisch von einem PDP15-Computer ausgelesen. Diese Daten dienen nur zu Kontrollzwecken. Die Ausgangspulse der Koinzidenzstufe werden außerdem in einem Prescaler untersetzt. D.h., nur jedes zehnte Ereignis gelangt in die Pulsformungsstufe. Dort wird gleichzeitig das Gate-Signal für den Energiezweig des Vorwärtsdetektors und das Routing-Signal für den Datenaufnahmerechner abgenommen. Die insgesamt 8 Energiezweige werden in einem Analogmultiplexer zusammengefaßt und mit einem ADC verbunden. Dieser wandelt die Signale in 7-Bit-Daten, entsprechend 128 Kanälen pro Spektrum.

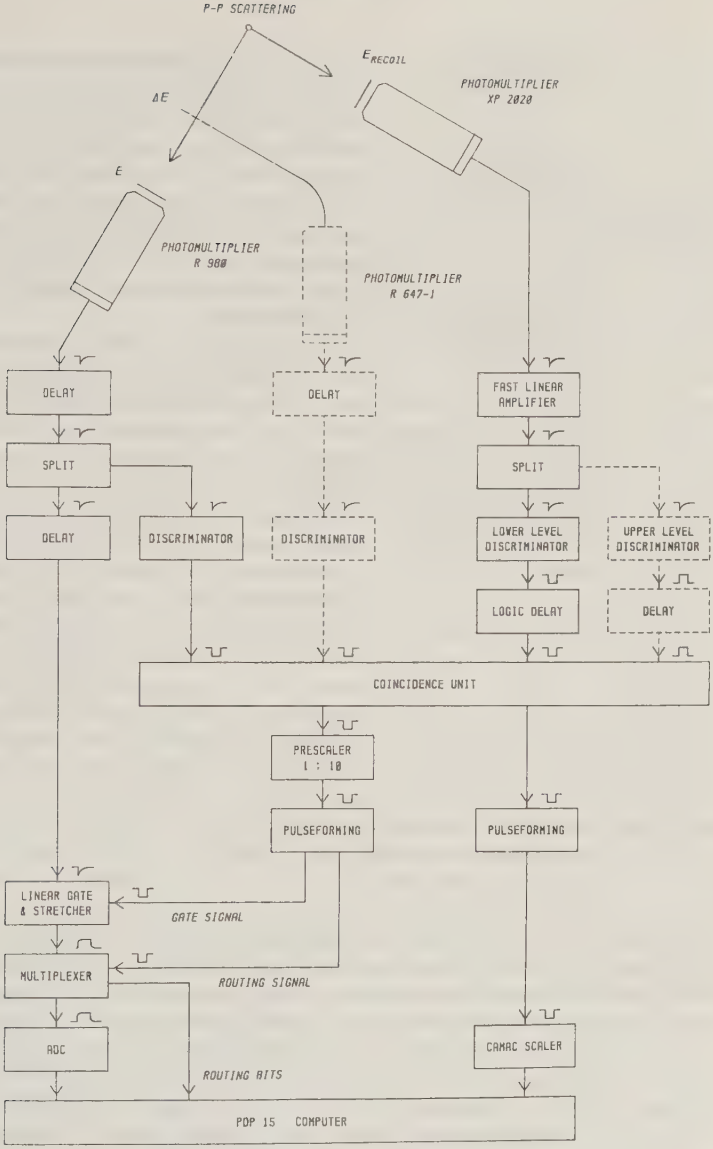

Fig. 3.7: Schema der Datenaufnahmeelektronik für die Streuwinkel $\Theta_{Lab} \leq 22{,}5°$.

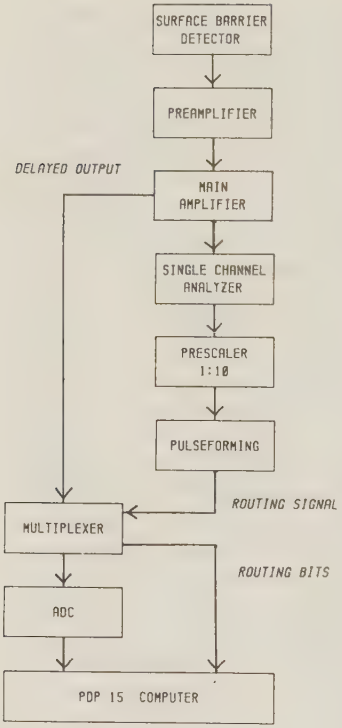

Fig. 3.8: Schema der Datenaufnahmeelektronik für $\Theta_{Lab} \geq 27,5°$.

Die Datenaufnahmeelektronik für die Halbleiterdetektoren ist in Fig. 3.8 abgebildet. Sie unterscheidet sich von Fig. 3.7 im wesentlichen durch den Wegfall der Koinzidenzmessung. Hier werden zusammen mit dem nicht untersetzten 160°-Detektor 7 Energiezweige von einem ADC verarbeitet.
Die Signale der zwei Polarimeterdetektoren werden in je einen eigenen ADC eingezählt. Daher ist hier weder ein Multiplexer noch eine Untersetzungsstufe notwendig.
Die Messungen wurden von einer Schaltung überwacht, die bei schwankendem Targetstrom die Prescaler bzw. bei den nicht untersetzten Zweigen die ADC's anhält. Ein schwankender Targetstrom ist ein Zeichen dafür, daß der Strahl an den Einschußblenden anstreift und den Untergrund in den Spektren erhöht.

Die Datenaufnahme im Rechner erfolgte mit dem Programm PP1 (Kön 84). Um Unregelmäßigkeiten am Experiment oder in der Elektronik erkennen zu können, wurde die Messung in einzelne Runs von ca. 2 Stunden Dauer unterteilt. Die Spektren wurden während des Runs periodisch auf Magnetplatte gesichert und am Ende des Runs einer Sofortauswertung unterzogen. Die Ergebnisse wurden abgespeichert und auf einem Drucker protokolliert. Am Ende einer Strahlzeit wurden sämtliche Files auf DEC-Tapes überspielt.

4 *Auswertung*

4.1 *Datenaufbereitung*

Die Datenbänder der Züricher PDP15 wurden im FORTRAN-Format mit 18 Bit Wortlänge beschrieben. Um eine Auswertung in Erlangen zu ermöglichen, wurde an der Erlanger PDP15 das Programm TRANS entwickelt, das diese Bänder liest und im FORCAM-Datenformat (Urb 77) wieder auf DEC-Tapes abspeichert. Dabei wird mehrfach auf fehlerhafte Datenübertragung abgeprüft. Die neuen Bänder können sowohl auf einer PDP11/40 mit dem Programm EDDA (Urb 78), als auch auf der PDP15 mit dem Programm A15 (Tra 77) ausgewertet werden. Das Programm A15 wurde an einigen Stellen ausgebaut, so daß die Serienauswertung der Meßruns erleichtert wird. Dies ist wichtig, weil insgesamt etwa 7000 Einzelspektren zum Teil mehrfach auszuwerten waren. Die erhaltenen Spektrumsintegrale, Untergrund usw. wurden zwecks Vermeidung von Übertragungsfehlern auf Band gespeichert. Von dort konnten sie über eine PDP11 mit dem Transferprogramm SPEKT (Sch 84) auf einen Kleinrechner CBM3032 übertragen werden. Die weitere Aufbereitung der Daten und die Berechnung der Analysierstärke erfolgte an diesem Rechner.

In Fig. 4.1 sind typische Spektren abgebildet. Fig. 4.1 oben zeigt ein Spektrum des Detektors bei $\Theta_{Lab} = 12{,}5°$ in Koinzidenz mit dem entsprechenden ΔE-Detektor und dem Rückwärtsdetektor. Vergleichsmessungen bei ausgeschalteter Koinzidenz und ohne Target zeigten, daß der niederenergetische Untergrund zum großen Teil erst nach der Streuung am Target entsteht und somit die gleiche Asymmetrie hat wie die Peakinhalte. Dies wurde auch dadurch bestätigt, daß eine Auswertung mit und ohne Untergrundabzug im Rahmen der statistischen Fehler die gleichen Ergebnisse lieferte. Für die weitere Auswertung wurden daher bei allen Photomultiplierspektren die Inhalte der Peaks ohne Untergrundabzug verwendet.

In Fig. 4.1 Mitte ist ein Spektrum eines Halbleiterdetektors bei $\Theta_{Lab} = 37{,}5°$ zu sehen. Da hier ohne Koinzidenz gearbeitet wird, sind zusätzlich die elastischen Linien der an Deuterium, Stickstoff und Sauerstoff gestreuten Protonen

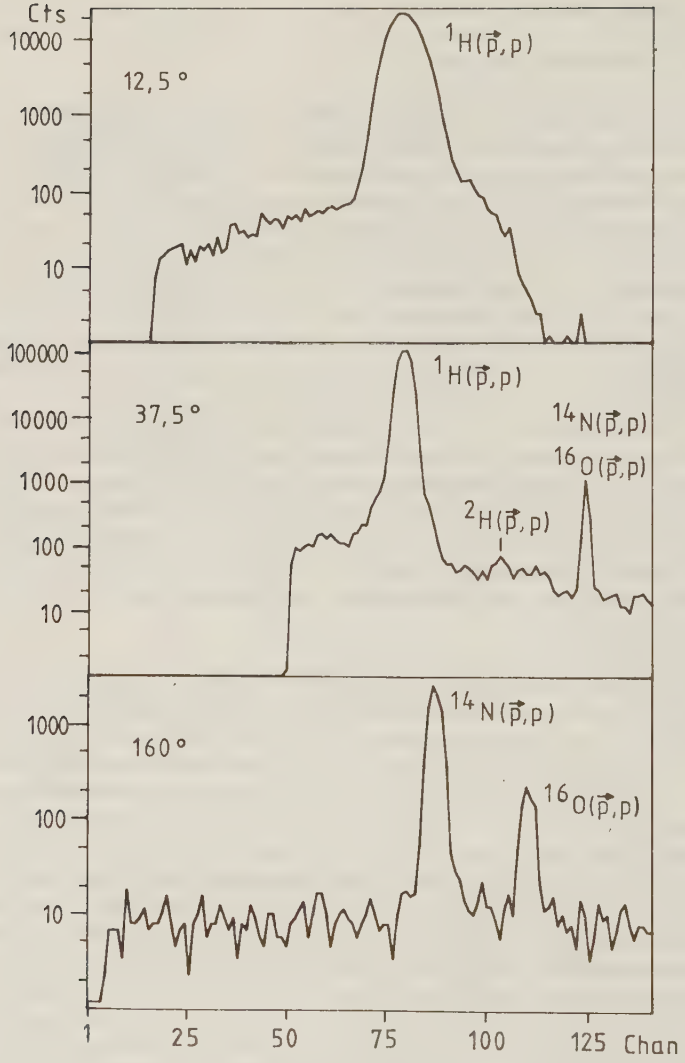

Fig. 4.1: Pulshöhenspektren der Detektoren bei den Winkeln 12,5°, 37,5° und 160°.

sichtbar. Aus den relativen Intensitäten dieser Linien gegenüber dem Proton-Proton-Peak konnte auf die Größe der Targetverunreinigung geschlossen werden. Die Berücksichtigung inelastischer Linien im Bereich des PP-Peaks wird in Abschnitt 4.3 behandelt. Der Untergrund weist eine geringe, jedoch signifikante Asymmetrie auf und wird durch keine Koinzidenzbedingung unterdrückt. Daher mußte bei den Winkeln $\Theta_{Lab} \geq 27{,}5^{\circ}$ ein Untergrundabzug vorgenommen werden. Die hohe Stabilität der Datenaufnahmeelektronik erlaubte es, alle unter gleichen Bedingungen aufgenommenen Spektren zu addieren. Damit konnte die Untergrundlinie mit größerer statistischer Genauigkeit bestimmt werden.

In Fig. 4.1 unten ist ein stark gespreiztes Spektrum des Zählers bei $\Theta_{Lab} = 160^{\circ}$ abgebildet. Bei diesem Winkel ist es möglich, die an Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff gestreuten Protonen aufgrund der Reaktionskinematik energetisch zu trennen und somit die Zusammensetzung der Wasserstoffverunreinigungen zu bestimmen. Eine Vergleichsmessung mit Luft als Target liefert ein Spektrum exakt gleicher Struktur. Somit ist als Verunreinigung nur Luft, die durch unvermeidbare Undichtigkeiten des Gaskreislaufs eindringt, nachweisbar. Eventuell vorhandene Kohlenwasserstoffe aus dem Pumpenöl werden durch Filter zurückgehalten (siehe Kap. 3.2).

4.2 Analysierstärkeauswertung

Zur Beschreibung des Streuprozesses verwendet man gemäß der Madison-Konvention (Mad 70) das in Fig. 4.2 abgebildete Koordinatensystem. Hier sind $\underline{k}_{in}$ bzw. $\underline{k}_{out}$ die Wellenvektoren des einfallenden bzw. gestreuten Strahls, Θ der Streuwinkel und $\hat{\underline{n}} \sim \underline{k}_{in} \times \underline{k}_{out}$ der Einheitsvektor in Richtung der Streunormalen. Man definiert ein kartesisches Koordinatensystem so, daß der Ursprung dem Streuort entspricht, die z-Achse längs $\underline{k}_{in}$ und die y-Achse längs $\hat{\underline{n}}$ zeigt. Die Richtung der x-Achse wird so gewählt, daß sich ein rechtshändiges Koordinatensystem ergibt. Die Richtung der Streunormalen und damit die y-Komponente des Polarisationsvektors wechselt das Vorzeichen beim Übergang von Rechts- auf Linksstreuung.

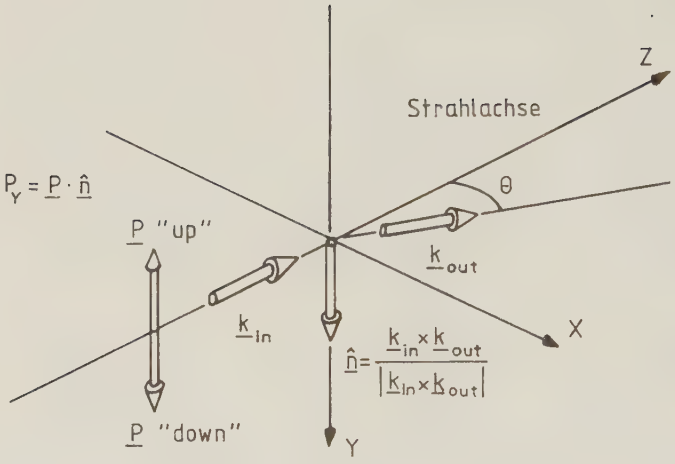

Fig. 4.2: Koordinatensystem zur Beschreibung der Streuung.

Nur die Komponente A_y des Analysierstärkevektors ist bei der Reaktion von Null verschieden (Fic 72), so daß man für den polarisierten Wirkungsquerschnitt folgenden Ausdruck erhält:

$$\sigma(\theta) = \sigma_0(\theta) \cdot (1 + p_y A_y(\theta))$$

σ_0 ist der Wirkungsquerschnitt bei unpolarisiertem Einschuß, p_y die Komponente des Polarisationsvektors in y-Richtung. Im vorliegenden Experiment legt man die Strahlpolarisation abwechselnd parallel und antiparallel zur y-Achse (Spin "up" bzw. "down"). Sowohl bei der Spinumschaltung als auch beim Übergang von Links- auf Rechtsstreuung ändert sich das Vorzeichen von p_y. Aus der Definition des Wirkungsquerschnitts erhält man dann die folgenden 4 Zählraten bei Doppelzählerauswertung und Spinumschaltung:

$$N_{i,j} = n_j \cdot d \cdot \Omega_i \cdot \sigma_0(\theta) \cdot (1 + (-1)^{\delta_{i,j}} \cdot p \cdot A(\theta))$$

Dabei ist:

i=l,r: Index für Detektor links bzw. rechts
j=u,d: Index für Spinstellung "up" bzw. "down"
n_j: Anzahl der auf das Target treffenden Protonen
d: Anzahl der Targetkerne pro Fläche
Ω_i: effektiver Raumwinkel = Raumwinkel mal Ansprechwahrscheinlichkeit
$(-1)^{\delta_{ij}} \cdot p$: y-Komponente des Polarisationsvektors

Nach Ohlsen (Ohl 73) kann man aus den N_{ij} und der Polarisation p die Analysierstärke A(Θ) berechnen. Im folgenden wird der allgemeinere Fall untersucht, daß sich die gemessenen Zählraten aus zwei verschiedenen Reaktionen mit den Analysierstärken A_1 und A_2 zusammensetzen, z.B. aus der Streuung an Wasserstoff und aus der Streuung an Verunreinigungen. Man hat dann

$$N_{ij} = N_{ij1} + N_{ij2}$$

wobei die N_{ijk} (k = 1, 2) definiert sind durch

$$N_{ijk} = n_j d_k \Omega_i \sigma_{0k}(\Theta) \cdot (1 + (-1)^{\delta_{ij}} \cdot p \cdot A_k(\Theta)).$$

Bildet man die Größe

$$K := \sqrt{\frac{N_{lu} \cdot N_{rd}}{N_{ld} \cdot N_{ru}}} \qquad (1)$$

und setzt für N_{ij} die obigen Ausdrücke ein, so kürzen sich die meisten Unbekannten heraus und man erhält

$$K = \frac{1+pA_1 + v(1+pA_2)}{1-pA_1 + v(1-pA_2)} \qquad (2)$$

Dabei ist $v := (\sigma_{02}(\Theta)d_2)/(\sigma_{01}(\Theta)d_1)$ das Zählratenverhältnis zwischen der Streuung an Target 1 und Target 2 bei unpolarisiertem Einschuß. Für die praktische Auswertung ist es sinnvoll, die Größe

$$A_{Eff} := \frac{1}{p} \cdot \frac{K-1}{K+1} \qquad (3)$$

zu betrachten. Sie läßt sich allein aus den gemessenen Zählraten N_{ij} und der Strahlpolarisation bestimmen. Einsetzen

der Gleichung (2) liefert den Zusammenhang

$$A_1 = A_{eff} + v\cdot(A_{eff} - A_2) \qquad (4)$$

A_{eff} ist also eine "effektive" Analysierstärke, die gleich der Analysierstärke der Reaktion 1 wird bei Abwesenheit der Reaktion 2, d.h. für v=0. Der statistische Fehler von A_{eff} errechnet sich mittels Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta A_{eff} = A_{eff}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{K}{K^2-1}\right)^2 \cdot \sum_{i,j}\left(\frac{\Delta N_{i,j}}{N_{i,j}}\right)^2} \qquad (5)$$

Für den Fehler der Polarisation wurde nur die statistische Unsicherheit der Polarimeterzählraten herangezogen. Die Analysierstärke der Polarimeterreaktion ist 98% ± 1%. Dieser Fehler geht in alle Streuwinkel gleich ein und ist somit als Normierungsfehler der gemessenen Winkelverteilung anzusehen. Für Überschlagsrechnungen läßt sich Gl. (5) stark vereinfachen. Da die p-p-Analysierstärke sehr klein ist, sind alle $N_{i,j}$ etwa gleich groß ($N_{i,j}\approx N$) und mit $\Delta p\approx 0$ folgt

$$\Delta A_{eff} \approx \frac{1}{2p}\cdot\frac{\Delta N}{N}$$

Bei der Berechnung der $\Delta N_{i,j}$ ist zu berücksichtigen, daß die Spektren mit einem bestimmten Faktor u untersetzt sind. Dies hat zwei Gründe: Zum einen ist die Kapazität des Datenaufnahmerechners begrenzt (18 Bit pro Kanal); zum anderen wird durch die Untersetzung die Totzeit der Aufnahmeelektronik erheblich reduziert, so daß eine Korrektur auf Totzeiteffekte entfällt. Wie sich dabei der statistische Fehler verändert, zeigt folgende Überlegung:
Wenn ein Detektor M Ereignisse registriert, so werden genau m = u·M Ereignisse in das Pulshöhenspektrum eingezählt. Die wahre Gesamtzählrate läßt sich damit auf 1/u Counts genau zurückrechnen. Dieser Fehler kann im folgenden völlig vernachlässigt werden.
Die Zählrate M setzt sich aus N guten Ereignissen und M-N Untergrundereignissen zusammen, die im Pulshöhenspektrum durch Setzen eines Energiefensters unterschieden werden können. N ist somit die Zahl, die in Gl. (1) einzusetzen ist. Die Wahrscheinlichkeit w(n), n gute Ereignisse im Spektrum zu finden, ist gemäß der hypergeometrischen Verteilung

$$w(n) = \frac{\binom{N}{n} \cdot \binom{M-N}{m-n}}{\binom{M}{m}}$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung ist $n = m \cdot N/M = u \cdot N$, die Varianz $\sigma^2(n)$ ist (Bro 83):

$$\frac{M-m}{M-1} \cdot m \cdot \frac{N}{M} \cdot \frac{M-N}{M}$$

Für $M \gg 1$ und $n \approx u \cdot N$ folgt daraus $\sigma^2(n) \approx (1-u) \cdot n \cdot (1-n/m)$. Hierbei ist noch nicht berücksichtigt, daß die zugrunde liegende Zählrate N selbst einer statistischen Verteilung mit der Varianz N unterliegt. Das vergrößert die Varianz von n um $u \cdot n$ und es ergibt sich schließlich:

$$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} - \frac{1-u}{m} \qquad (6)$$

Bei gegebener Untersetzung u ist der Fehler am kleinsten, wenn $m = n$, also wenn kein Untergrund vorhanden ist. Der relative Fehler ist dann $(\Delta n)/n = 1/\sqrt{N}$ und damit gleich dem Fehler, den man ohne Untersetzung haben würde.
Wie man aus Gleichung (1) und (5) ersieht, kommen bei der Analysierstärkeberechnung nur Zählratenverhältnisse und relative Fehler der Zählraten vor. Daher können in den Formeln die untersetzten Zählraten mit den Fehlern aus Gl. (6) eingesetzt werden. Die so erhaltenen effektiven Analysierstärken sind nach Streuwinkel und Meßruns geordnet in Fig. 4.3 und Fig. 4.4 abgebildet. Das gewichtete Mittel A von n Einzelwerten A_i mit Fehlern ΔA_i ist

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(\Delta A_i)^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\Delta A_i)^2}}$$

Für den Fehler von A gilt $1/(\Delta A)^2 = \sum_i 1/(\Delta A_i)^2$.
Der Wert A ist jeweils als letzter Punkt in der Grafik eingetragen. Die Streuung der einzelnen A_i um den Mittelwert wird durch die Funktion $\chi^2 := \sum_i (A_i - A)^2/(\Delta A_i)^2$ beschrieben. χ^2 ist selbst eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert n-1 und der Standardabweichung $\sqrt{2n}$. $\chi^2/(n-1)$ sollte daher in der Nähe von 1 liegen. Für die in Fig. 4.3 und Fig. 4.4 gezeigten Punkte ergaben sich Werte zwischen 0,9 und 1,5.

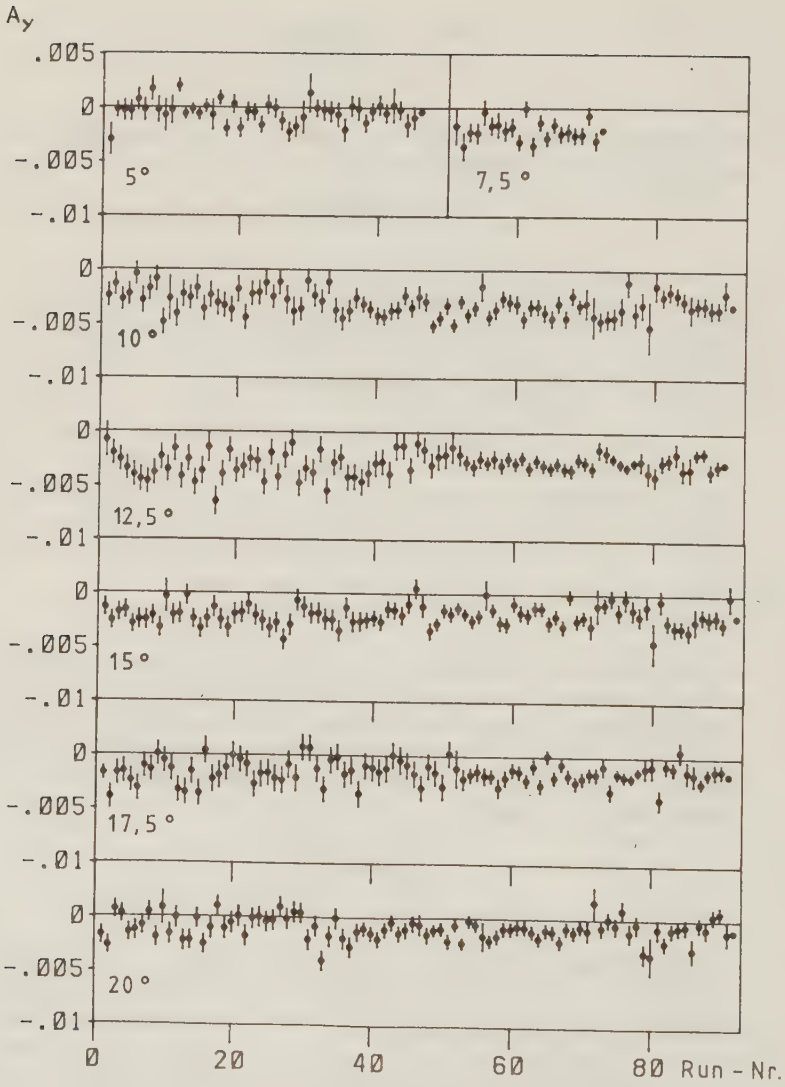

Fig. 4.3: Analysierstärkeergebnisse der Einzelruns für die Winkel 5° bis 20°.

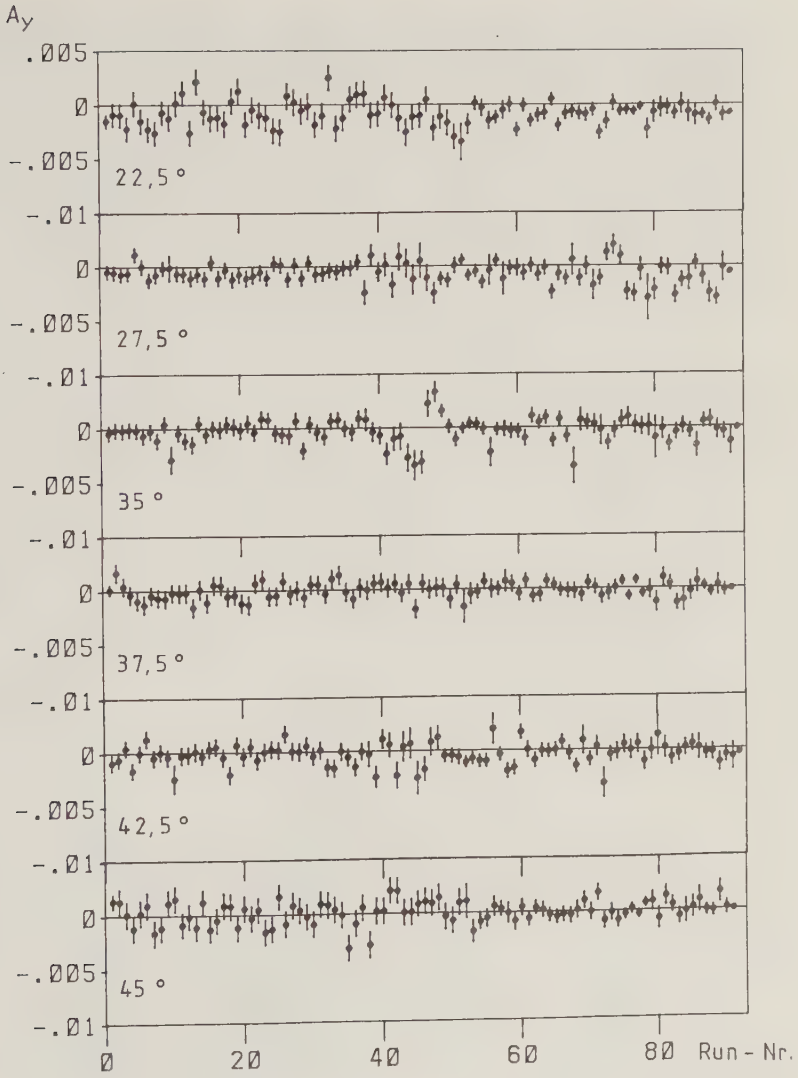

Fig. 4.3: Analysierstärkeergebnisse der Einzelruns für die Winkel 22,5° bis 45°.

In Fig. 4.5 ist exemplarisch für Θ_{Lab} = 12,5° ein Histogramm abgebildet, das die Häufigkeit bestimmter Analysierstärkeergebnisse wiedergibt. Unter der Voraussetzung, daß die statistischen Fehler der einzelnen Meßruns gleich groß und die Ergebnisse gaußverteilt sind, ist die Halbwertsbreite dieser Verteilung ungefähr gleich der Länge des Fehlerbalkens eines Einzelergebnisses. Diese Bedingung gleicher Fehlerbalken trifft hier nicht zu. Dennoch läßt die Form und Symmetrie des Peaks darauf schließen, daß die Streuung der Meßwerte rein statistischer Natur ist.

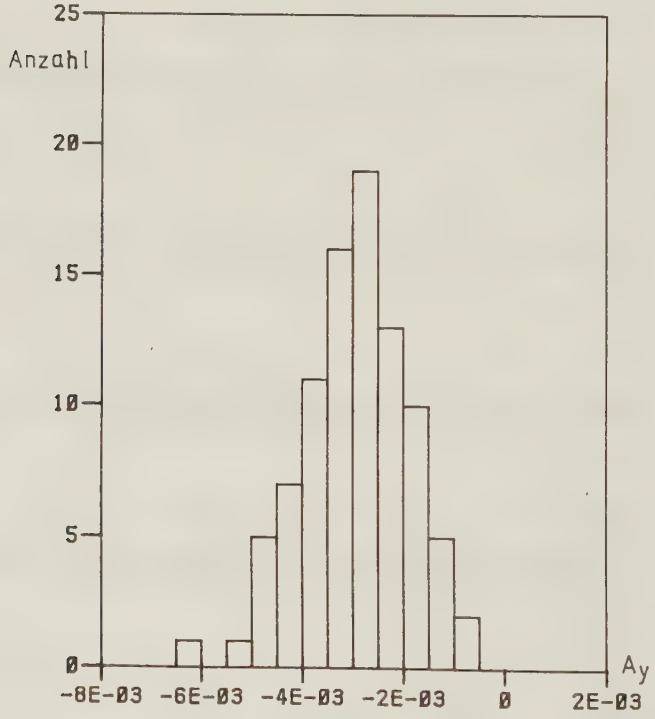

Fig. 4.5: Häufigkeitsverteilung bestimmter Analysierstärkeergebnisse der Einzelruns zum Streuwinkel 12,5°.

Die Messung bei den Streuwinkeln 5° und 7,5° war bei jeweils nur einer Strahlzeit möglich, da hierfür optimale Meßbedingungen notwendig waren. Daher ist hier die Zahl der Datenpunkte kleiner als bei den anderen Winkeln.

Die Messung bei Θ_{Lab}= 30° lieferte viel zu große χ^2-Werte. Insbesondere die Teilergebnisse verschiedener Strahlzeiten waren völlig inkompatibel. Dies ist auf einen unbekannten systematischen Meßfehler zurückzuführen. Die 30°-Meßdaten wurden deshalb verworfen.

Bei den in Koinzidenztechnik gemessenen Streuwinkeln 7,5° bis 22,5° stellen die gemittelten Werte bis auf die Korrektur auf endlichen Raumwinkel (siehe unten) das Endergebnis dar. Die Rückstoßkerne aller Targetverunreinigungen einschließlich Deuterium erzeugen Detektorimpulse, die mindestens um einen Faktor 2 kleiner sind als bei den entsprechenden Rückstoßprotonen und daher leicht durch die Diskriminatoren abgetrennt werden können. Die Zählrate ν der zufälligen Koinzidenzen bei einer Zweierkoinzidenz ist $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot (\tau_1+\tau_2)$, wobei ν_1 und ν_2 die Untergrundzählraten der beiden Detektoren und τ_1 bzw. τ_2 die Längen der Eingangspulse in die Koinzidenz sind. Die größte Untergrundzählrate trat für die 7,5°-Koinzidenz auf (Rückwärtszähler $\nu_2 \approx 2$ MHz). Mit $\tau_1+\tau_2 \approx 10$ ns wird der Untergrundunterdrückungsfaktor $\nu_2 \cdot (\tau_1+\tau_2)$ hier 1:50, nimmt aber bei den größeren Streuwinkeln drastisch ab.

Beim Winkel 5° war ein Nachweis der rückgestreuten Protonen nicht möglich, da die mittlere Energie dieser Protonen ohne Berücksichtigung des Energieverlustes im Target nur 90 keV beträgt. Die entsprechenden Detektorimpulse waren vom Untergrundrauschen nicht zu trennen. Daher mußte hier ohne Koinzidenz gemessen und auf die an Luft gestreuten Protonen korrigiert werden. In einer separaten Messung wurde die effektive Analysierstärke A_2 für Streuung an Luft bestimmt. Den in Gleichung (4) benötigten Faktor v erhält man auf folgende Weise: Aus der Messung mit einem Lufttarget wird das Intensitätsverhältnis I zwischen den elastischen Peaks bei Θ_{Lab} = 5° und Θ_{Lab} = 35° bestimmt. Unter sonst gleichen Bedingungen wird die Messung mit einem Wasserstofftarget durchge-

führt. Da bei Θ_{Lab} = 35° der Luft-Peak vom Wasserstoff-Peak energetisch getrennt werden kann, erhält man aus dem Inhalt des Luft-Peaks und dem Verhältnis I den bei 5° nicht abtrennbaren Anteil der an der Luftverunreinigung gestreuten Protonen und damit v. Da bei Θ_{Lab} = 5° zufällig $A_2 \approx A_{Eff}$ gilt, ist die Korrektur auch für verhältnismäßig große v klein. In die Auswertung wurden alle Runs mit $v \leq 1$ einbezogen. Die Korrektur betrug damit $-1{,}4 \cdot 10^{-4} \pm 1 \cdot 10^{-4}$.

Die nicht mit Koinzidenz gemessenen Streuwinkel $27{,}5° \leq \Theta_{Lab} \leq 45°$ erforderten eine ähnliche Behandlung wie bei 5°. Aufgrund der durch die Reaktionskinematik verbreiterten elastischen Wasserstoff-Peaks gibt es in dem entsprechenden Energieintervall bei jedem dieser Winkel Störreaktionen der Form $^{14}N(p,p')$ oder $^{14}N(p,\alpha_0)$ (Ajz 70). Die Korrekturen betrugen zwischen $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ und $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ mit Fehlern von $0{,}4 \cdot 10^{-5}$ bis $4 \cdot 10^{-5}$.

Eine alle Winkel betreffende, jedoch sehr kleine Korrektur ist durch die endlichen Öffnungswinkel der Blenden gegeben (Sil 59). Unter der Annahme eines punktförmigen Targets und kreisförmiger Blenden wurde die Abweichung der wahren Analysierstärke A von der winkelgemittelten Analysierstärke A_{Eff} in eine Reihe nach Potenzen des halben Öffnungswinkels $\Delta\Theta$ entwickelt:

$$A = A_{Eff} - \frac{1}{8} (\Delta\Theta)^2 \cdot \left(A_{Eff}'' + 2 \cdot A_{Eff}' \cdot \frac{\sigma_0'}{\sigma_0}\right) + \ldots$$

σ_0 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt. Die Striche bedeuten Ableitungen nach dem Streuwinkel Θ. Die Ableitungen wurden aus Bestfitkurven (siehe Kap. 5) berechnet. Die betragsmäßig größte Korrektur war $-8 \cdot 10^{-4}$ bei Θ_{Lab} = 10°.
Der Einfluß der endlichen Targetausdehnung konnte nicht berechnet werden, da die Dichteverteilung im Target nicht genau genug bekannt war. Aufgrund des kleinen Targetdurchmessers sollte jedoch der Einfluß auf die Analysierstärke kleiner sein als die Auswirkung der endlichen Blendengeometrie.

Als weitere Fehlerquelle tritt die durch mechanische Toleranzen bedingte Unsicherheit in der Lage der Blenden auf. Die daraus resultierende Unsicherheit $\Delta\Theta'$ des effektiven

Streuwinkels $\Theta' = 1/2 \cdot (\Theta_{links} + \Theta_{rechts})$ beträgt ca. 0,02 Grad. Ein zusätzlicher Fehler von $| \partial A(\Theta)/\partial\Theta \cdot \Delta\Theta' |$ wurde daher zum Analysierstärkefehler quadratisch addiert.
Ein nicht auf der Symmetrieachse liegender Tandemstrahl hat keinen Einfluß auf das Meßergebnis, da durch die Doppelzähleranordnung mit Spinumschaltung dessen Auswirkungen eliminiert werden (Ohl 73).

4.3 Ergebnisse

Die in Kapitel 4.2 behandelten Korrekturen und Fehler führen zu den in Fig. 4.6 grafisch dargestellten und in Tab. 4.7 numerisch aufgelisteten Analysierstärkewerten. Der Fehler der effektiven Analysierstärke des Heliumpolarimeters ist 1% und wirkt sich gleichmäßig auf alle Winkel aus. Er ist daher in den Fehlern der einzelnen Winkel nicht enthalten. Dieser systematische Fehler wirkt sich mit maximal $3 \cdot 10^{-5}$ auf die Analysierstärken aus.

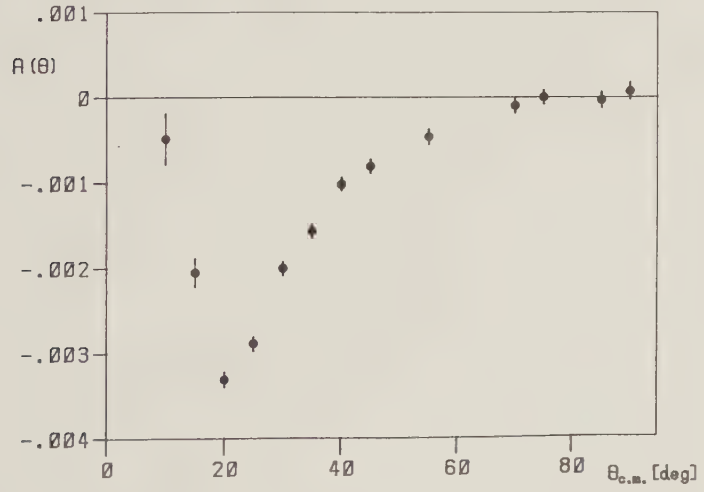

Fig. 4.6: Gemessene Winkelverteilung der Analysierstärke der Reaktion $^1H(\vec{p},p)$ bei E_{Lab} = 12 MeV.

Θ_{Lab} in Grad	Θ_{CM} in Grad	$A(\Theta)\cdot 10^3$	$\Delta A\cdot 10^3$
5	10,031	−0,491	0,300
7,5	15,047	−2,058	0,168
10	20,062	−3,311	0,087
12,5	25,077	−2,890	0,081
15	30,091	−2,007	0,078
17,5	35,104	−1,572	0,082
20	40,117	−1,024	0,074
22,5	45,129	−0,811	0,081
27,5	55,149	−0,466	0,092
35	70,171	−0,098	0,090
37,5	75,176	+0,002	0,082
42,5	85,181	−0,034	0,093
45	90,182	+0,072	0,101

Tab. 4.6: Liste der Ergebnisse der Analysierstärkemessung.

5 Analyse und Diskussion

5.1 Streuphasenprogramm

Die Analyse der Meßdaten wurde an der Rechenanlage CDC Cyber 845 des regionalen Rechenzentrums Erlangen mit einem von W. Watari (Wat 77) stammenden Streuphasenfitprogramm durchgeführt. Neben einigen kleineren Änderungen wurde in die Version WAT5 dieses Programms die Korrektur auf Vakuumpolarisationseffekte (Kap. 2.5) eingebaut. Ferner wurde die Möglichkeit geschaffen, die in Kap. 2.4 eingeführten Streuphasenkombinationen Δ_i als feste oder zu variierende Parameter einzugeben.
Das Programm rechnet mit den bei Stapp (Sta 57) definierten "nuclear bar"-Streuphasen, die durch die getroffene Wahl der Parametrisierung der Streumatrix definiert sind.
Je nachdem, ob die Korrektur auf Vakuumpolarisation verwendet wird oder nicht, sind die Ein- und Ausgabeparameter die elektrischen Streuphasen δ_{LJ}^{el} oder die Streuphasen K_{LJ}. Es gilt der Zusammenhang $K_{LJ} = \delta_{LJ}^{el} + \tau_L$ (siehe Kap. 2.4). In der Literatur werden meistens die elektrischen Streuphasen angegeben.
Bei früheren Analysen, z.B. bei (Bit 79), wurde der Vakuumpolarisation dadurch Rechnung getragen, daß man bei der Ein- und Ausgabe die wesentlich von Null verschiedenen Streuphasen mit der Vakuumpolarisationsphase τ_L korrigierte. Es wurde untersucht, inwieweit dieses Vorgehen zulässig ist. Dazu wurde zunächst eine Rechnung ohne Vakuumpolarisationskorrektur durchgeführt, indem statt der K-Phasen die elektrischen Streuphasen aus einem weiter unten beschriebenen Bestfit bei 12 MeV ins Programm eingegeben und daraus die Observablen σ, A und D berechnet wurden. Als nächstes wurden sukzessive alle elektrischen Streuphasen mit $L \leq 1,3,\ldots,15$ durch K_{LJ} ersetzt. Die sich ergebenden Abweichungen der berechneten Observablen von der Rechnung ohne Korrektur sind in Fig. 5.1 als gestrichelte Kurven gezeigt. Während bei der Analysierstärke und der Depolarisation die Differenz aufgetragen ist, handelt es sich beim Wirkungsquerschnitt wegen der besseren Darstellbarkeit um die relative Abweichung $\Delta\sigma/\sigma$. Die Kurven mit den häufigeren Oszillationen gehören jeweils zu den größeren Bahndrehimpulsen.

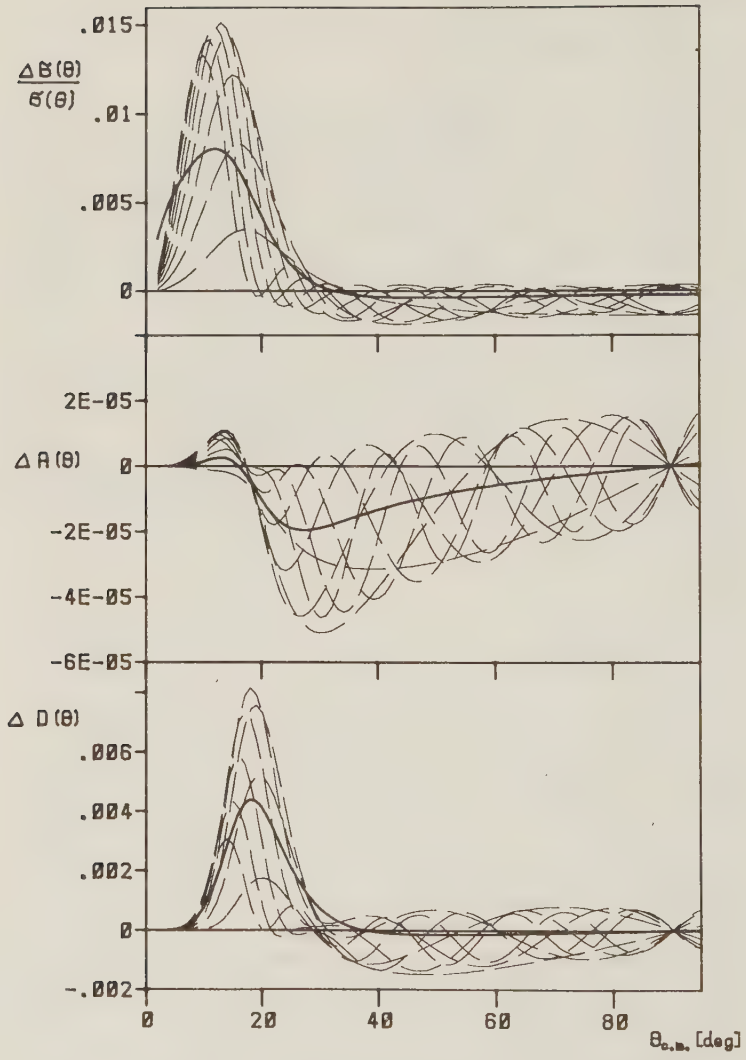

Fig. 5.1: Abweichungen der Observablen ε, A und D durch die Korrektur auf Vakuumpolarisation. Näheres im Text.

Berechnet man die Observablen mit der internen Korrektur, was einer Mitnahme der τ_L bis $L = \infty$ entspricht, so erhält man als Abweichungen die durchgezogenen Kurven. Der Unterschied zwischen den gestrichelten und den durchgezogenen Kurven zeigt, daß die Phasen τ_L mit $L > 15$ nicht zu vernachlässigen sind.
In dieser Arbeit interessiert speziell das Verhalten der Analysierstärke. Hier verursacht die Korrektur Verschiebungen von bis zu $2 \cdot 10^{-5}$, was etwa einem Viertel des statistischen Fehlers der gemessenen Werte entspricht.

Im Programm WAT5 unterscheidet man zwischen festen und zu variierenden Parametern. Die Fitparameter, z.B. die ^3P-Streuphasenkombinationen, werden solange variiert, bis die Funktion

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^{n} \frac{(X(i)-X_{Exp}(i))^2}{(\Delta X_{Exp}(i))^2}$$

minimal ist. χ^2 mißt die Abweichung der aus den Parametern berechneten Obsevablen X(i) von den experimentell bestimmten Observablen $X_{Exp}(i)$, gewichtet mit den statistischen Fehlern $\Delta X_{Exp}(i)$. Wenn m die Anzahl der zu fittenden Parameter und n die Zahl der experimentellen Daten ist, so sollte $\chi^2/(n-m)$ einen Wert von 1 ergeben, sofern die experimentellen Daten statistisch unabhängig sind, einer Gaußverteilung unterliegen und ein Parametersatz existiert, der die Erwartungswerte der Observablen exakt beschreibt (Bev 69).
Wenn a_i, $i=1,\ldots,m$ die gefitteten Parameter sind, so definieren die Zahlen

$$\alpha_{ik} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_k} \qquad (1)$$

eine symmetrische m-reihige Matrix $\underline{\underline{\alpha}}$, die bei unabhängigen Parametern a_i regulär ist und somit eine inverse Matrix $\underline{\underline{\varepsilon}}$ besitzt. $\underline{\underline{\varepsilon}}$ bezeichnet man als Fehlermatrix. Die Diagonalelemente von $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sind gleich den Fehlerquadraten der Parameter a_i. Die Nichtdiagonalelemente von $\underline{\underline{\varepsilon}}$ benötigt man, wenn aus den Parametern a_i eine neue Größe $f(a_1,\ldots,a_m)$ berechnet wird und der Fehler σ_f von f bestimmt werden soll. Dieser ist gegeben durch

$$\sigma_f^2 = \sum_{i,k=1}^{m} \varepsilon_{ik} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (2)$$

Faßt man die Bestfitparameter a_i als Funktionen der Eingabeobservablen $X_{Exp}(j)$ auf, und drückt ε direkt als Funktion der Fehler $\Delta X_{Exp}(j)$ aus, so ergibt sich durch Vergleich mit obiger Gleichung der Zusammenhang

$$\varepsilon_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial X_{Exp}(j)} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial X_{Exp}(j)} \cdot (\Delta X_{Exp}(j))^2 \qquad (3)$$

Das Programm WAT5 berechnet die Fehlermatrix aus der Krümmung der χ^2-Funktion, also im Prinzip nach Gleichung (1). Da in der ursprünglichen Version des Programms die Berechnung fehlerhaft war, wurde in der neuen Version zum Vergleich $\underline{\underline{\varepsilon}}$ auch nach Gleichung (3) berechnet, indem in n Fitläufen jeder einzelne Wert $X_{Exp}(j)$ um $\Delta X_{Exp}(j)$ verändert wurde.
Als weiterer Konsistenztest wurde jeweils einer der Bestfitparameter um seinen berechneten statistischen Fehler vergrößert und festgehalten, während die restlichen Parameter nachgefittet wurden. Dies muß ein um 1 vergrößertes χ^2 ergeben. Die beiden Tests lieferten nunmehr eine sehr gute Übereinstimmung mit der von WAT5 berechneten Fehlermatrix.

5.2 Bestimmung der Bestfitparameter

Bei der Auswahl der aus dem Experiment zu bestimmenden Streuphasen wurde von folgender Überlegung ausgegangen: Klassisch gilt der Zusammenhang $p \cdot b = L \cdot \hbar$ zwischen dem Impuls p, dem Stoßparameter b und dem Bahndrehimpuls $L\hbar$. Mit $p = \hbar k$ folgt daraus $b = L/k$. Für L = 2 und Laborenergie E = 12 MeV ergibt sich b = 5,3 fm als ungefährer kleinster Abstand zwischen den beiden wechselwirkenden Protonen. Die Streuzustände mit $L \geq 2$ sind also nur auf den langreichweitigen Anteil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung sensitiv und werden deshalb im wesentlichen durch den Ein-Pion-Austausch (OPE) beschrieben. Ein Vergleich verschiedener Modellvorhersagen zeigt in der Tat, daß die Streuphasen mit L = 2 und L = 3 nur geringe Unterschiede zwischen den Modellen zeigen und daß alle Phasen mit L > 3 praktisch vernachlässigbar sind und mit den OPE-Werten übereinstimmen. Für L = 4 bis L = 15 wurden daher bei den Analysen stets die von WAT5 selbst berechneten OPE-Streuphasen und Mischungsparameter verwendet, während für L = 2 und L = 3 die Parameter der betrachteten

Potentialmodelle oder existierender Analysen eingesetzt wurden. Für die übrigen 4 Parameter wurde die Beschreibung durch δ_{oo}^{E}, Δ_C, Δ_{LS} und Δ_T gewählt. Wieviele dieser 4 Parameter gleichzeitig gefittet werden können, hängt von der zur Verfügung stehenden Datenbasis ab.

Bis jetzt liegen in der Proton-Proton-Streuung bei 12 MeV nur Analysierstärke- und Depolarisationsdaten vor, jedoch keine Wirkungsquerschnittsdaten. Für die Analyse wurden die in dieser Arbeit (Kap. 4.3) vorgestellten Analysierstärkewerte und vorläufige, bei 12 MeV in Erlangen gemessene Depolarisationswerte verwendet (Höp 86). Eine ausführliche Darstellung der Depolarisationsmessung und eine Diskussion vorläufiger Daten findet man bei R. Schmitt (Sch 86).

Sowohl die δ_{oo}^{E}-Phase als auch jede der Streuphasenkombinationen Δ_i ist einzeln auf die Analysierstärke und zum Teil auf die Depolarisation sensitiv. Diese beiden Observablen reichen aber nicht aus, um die 4 Parameter unabhängig voneinander festzulegen. Es zeigte sich, daß nur zwei Parameter gleichzeitig gefittet werden können. Bei E = 12 MeV liegt zwar noch keine Wirkungsquerschnittsmessung vor, jedoch existieren bei benachbarten Energien, z.B. bei 9,919 MeV und 13,6 MeV (Heg 77) solche Messungen. Vorhandene Multienergieanalysen, z.B. (Arn 83), stützen sich auf diese Daten. Man kann daher annehmen, daß diejenigen Parameter, die auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt besonders sensitiv sind, aus diesen Analysen einigermaßen zuverlässig extrahiert werden können. Dies sind, wie in Kap. 2 gezeigt, die δ_{oo}^{E}-Streuphase und die zentrale P-Wellenkombination Δ_C. Diese beiden Parameter wurden daher bei allen Fits festgehalten; nur Δ_{LS} und Δ_T wurden gefittet.

Die Zusammenhänge werden besonders deutlich, wenn man Sensitivitätsrechnungen durchführt. Dazu werden ausgehend von einem realistischen Streuphasensatz einzelne Parameter um einen bestimmten Betrag variiert und in einer sogenannten "one shot"-Rechnung, bei der alle Parameter festgehalten werden, ihr Einfluß auf die Observablen berechnet und grafisch dargestellt. Das Ergebnis ist in Fig. 5.2 bis 5.5 gezeigt.

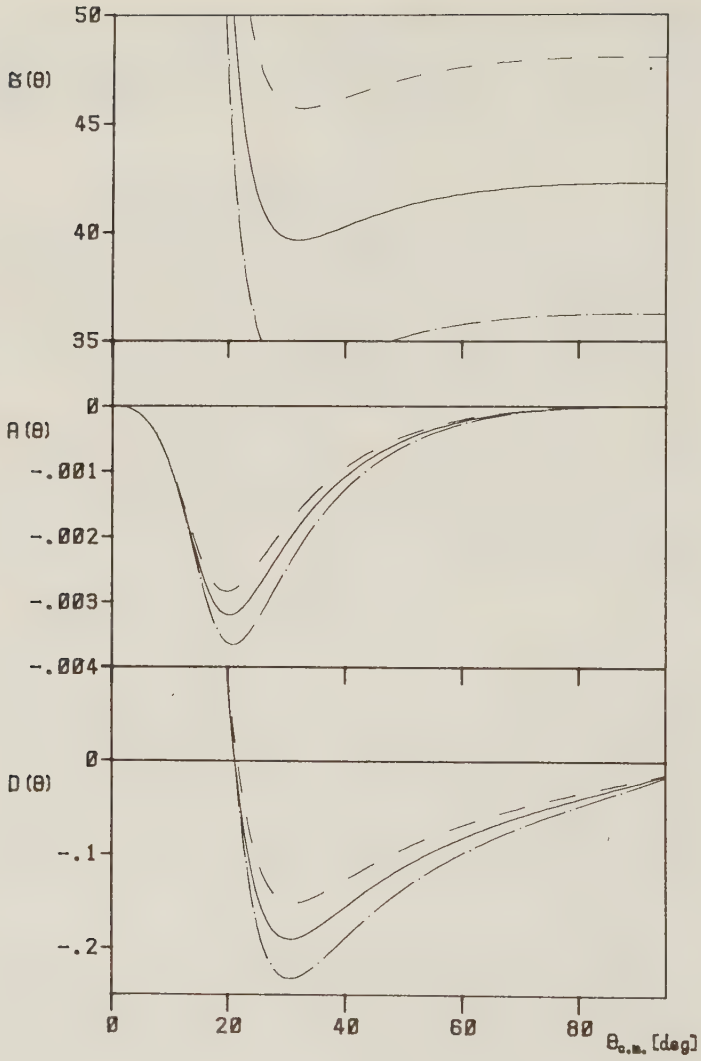

Fig. 5.2: Einfluß einer Variation der Phase δ^{L}_{00} auf die Observablen. ——— : Bestfit; — - — : Variation um +5°; —·—· : Variation um -5°.

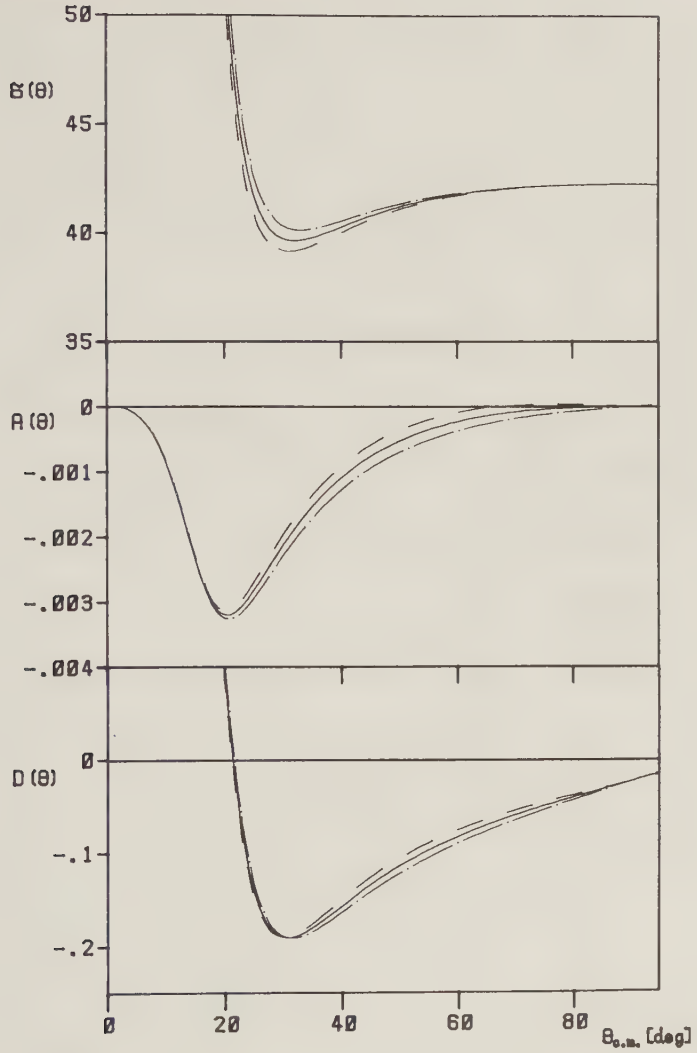

Fig. 5.2: Einfluß einer Variation der Streuphasenkombination Δ_C auf die Observablen. ——— : Bestfit; — — —: Variation um +0,2°; —·—·—: Variation um −0,2°.

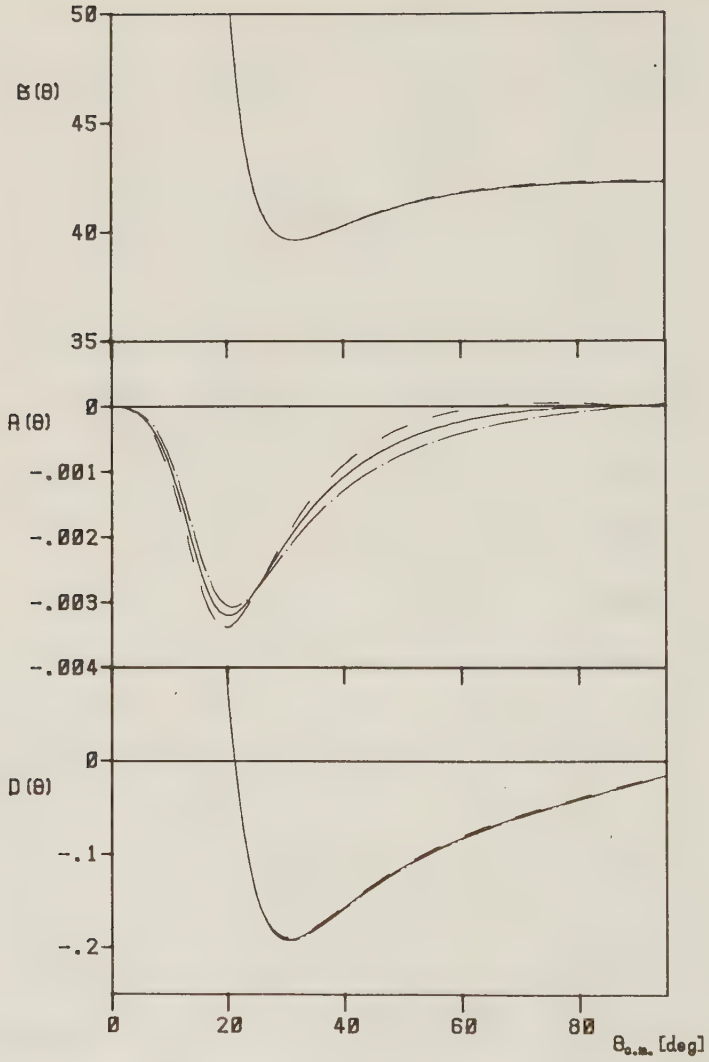

Fig. 5.2: Einfluß einer Variation der Streuphasenkombination Δ_{LS} auf die Observablen. ——— : Bestfit; — — —: Variation um +0,2°; —·—·—: Variation um -0,2°.

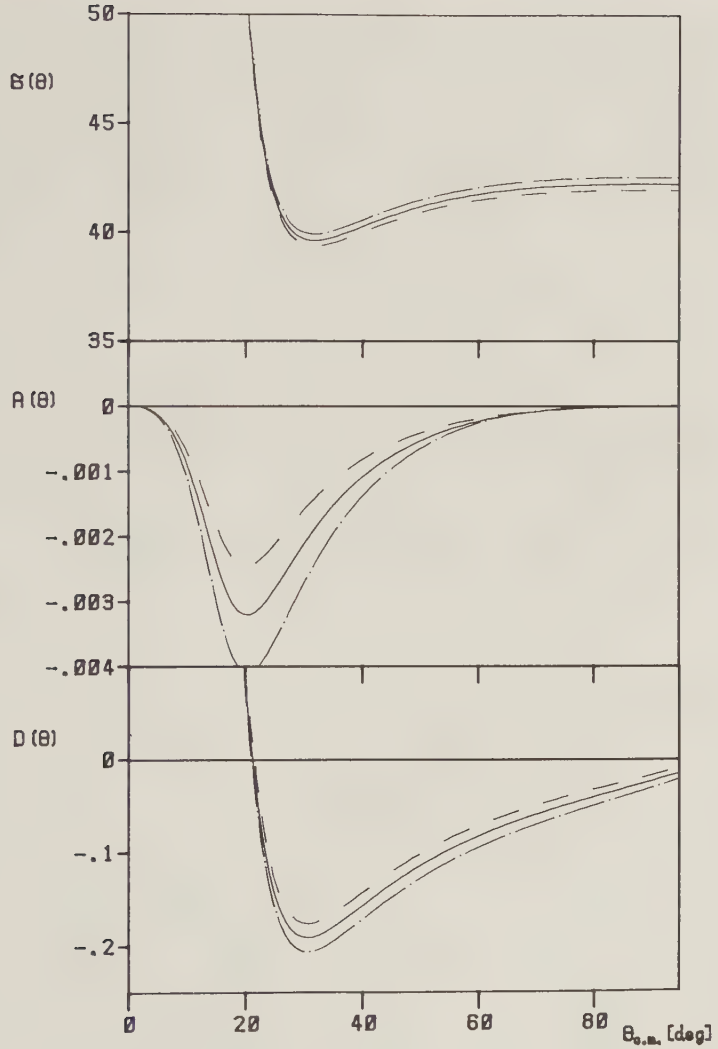

Fig. 5.2: Einfluß einer Variation der Streuphasenkombination Δ_T auf die Observablen. ——— : Bestfit; — — —: Variation um +0,2°; —·—·—: Variation um -0,2°.

In jedem der Bilder sind als durchgezogene Linien die aus dem Startparametersatz berechneten Observablen differentieller Wirkungsquerschnitt, Analysierstärke und Depolarisation aufgetragen. Die gestrichelten bzw. strichpunktierten Kurven ergeben sich bei Variation des jeweils angegebenen Parameters. Diese Bilder bestätigen die in Kap. 2 gemachten Aussagen über die Sensitivitäten der Observablen. Während die δ^{E}_{00}-Phase im wesentlichen als Skalierungsfaktor für die Observablen wirkt, ist der Einfluß der L=1 - Streuphasenkombinationen verschiedenartig. Die Kombination Δ_{LS} beeinflußt nur die Analysierstärke und kann daher nur durch eine Messung derselben bestimmt werden. Die Kombination Δ_T beeinflußt zwar alle drei betrachteten Observablen, jedoch ist auch hier die Analysierstärke am empfindlichsten. Der Parameter Δ_C ist der einzige, der auf die Form der Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts sensitiv ist. Die Bilder geben einen Hinweis darauf, welcher Winkelbereich bei den Experimenten wichtig ist. Man erkennt, daß bei der Analysierstärke der am genauesten gemessene Winkelbereich $10^{\circ} \leq \Theta_{Lab} \leq 22{,}5^{\circ}$ den größten Einfluß auf die Streuphasen hat. Bei diesen Winkeln dominiert der Interferenzterm zwischen Kern- und Coulomb-Streuamplituden.

Die Bestimmung der Bestfitparameter erfolgte so, wie im letzten Abschnitt beschrieben wurde. Die festen Parameter stammen aus einer globalen Streuphasenanalyse von Arndt (Arn 83), aus den Modellvorhersagen des Paris-Potentials (Lac 80) und denen des Nijmegen-Potentials (Nag 78). In Tabelle 5.6 sind die Ergebnisse von Fits nur mit den Analysierstärkedaten dieser Arbeit aufgelistet. Die Zahlenwerte der festen Parameter (obere Hälfte) entstammen beim Paris- bzw. Nijmegen-Potential privaten Mitteilungen von Vinh Mau (Vin 86) bzw. de Swart (Swa 86). Die Werte von Arndt wurden dem in (Arn 83) zitierten Programm SAID entnommen. Mit Arndt1 bzw. Arndt2 sind Parameter bezeichnet, die in einer energieabhängigen Analyse von pp- und np-Daten im Energiebereich zwischen 0 und 1 GeV bzw. zwischen 8 und 18 MeV bestimmt wurden. Die δ^{E}_{1J} wurden aus den Δ_i und der Fehlermatrix berechnet.

	Arndt1	*Arndt2*	*Paris*	*Nijmegen*
fest:				
δ_{00}^{E}	53,53	53,46	54,29	54,97
Δ_C	0,168	0,121	0,147	0,150
δ_{22}^{E}	0,22	0,23	0,24	0,22
ε_2^E	-0,28	-0,29	-0,29	-0,27
δ_{32}^{E}	0,02	0,02	0,02	0,02
δ_{33}^{E}	-0,05	-0,06	-0,05	-0,05
gefittet:				
Δ_{LS}	0,274±0,034	0,307±0,035	0,280±0,036	0,274±0,035
Δ_T	-1,202±0,011	-1,191±0,012	-1,214±0,011	-1,230±0,012
aus der Fehlermatrix:				
δ_{10}^{E}	4,429±0,098	4,270±0,082	4,450±0,091	4,523±0,078
δ_{11}^{E}	-2,511±0,030	-2;567±0,044	-2,551±0,039	-2,584±0,046
δ_{12}^{E}	0,923±0,032	0,904±0,036	0,922±0,036	0,916±0,036

Tab. 5.6: Bestfitparameter in Grad aus Fit an Analysierstärkewerten mit statistischen Fehlern.

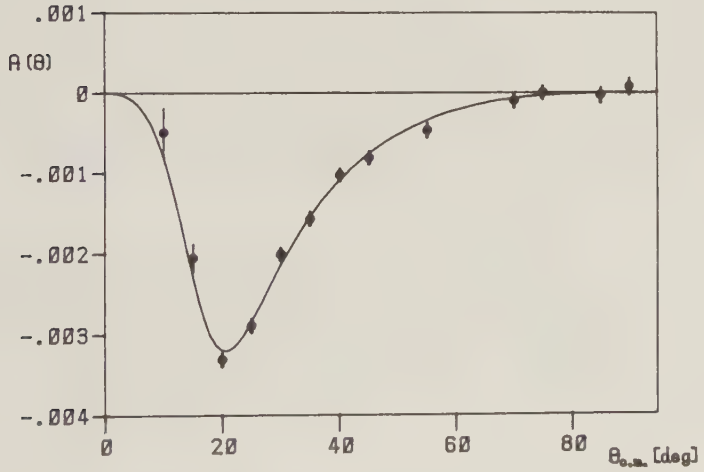

Fig. 5.7: Gemessene Analysierstärkepunkte mit Bestfitkurve.

Mit allen 4 Ansätzen erhält man einen Fit etwa gleicher Güte mit $\chi^2 \approx 12$, was einen Wert von 1,1 für χ^2 pro Freiheitsgrad ergibt (der Erwartungswert ist eins). Daher sind auch die aus den Bestfitparametern berechneten Analysierstärken praktisch gleich und in Fig. 5.7 ist nur *eine* Bestfitkurve mit den zugehörigen experimentellen Daten zu sehen. Es fällt auf, daß beim Fit steigende S-Phasen zu betragsmäßig größeren Δ_T - Werten führen, während zu größeren Δ_C kleinere Δ_{LS} gehören. Dies zeigt, daß diese Parameter paarweise qualitativ voneinander abhängen.

In den Fig. 5.8 und 5.9 ist dieser Zusammenhang grafisch dargestellt. Fig. 5.8 basiert auf Phasenfits, bei denen die Parameter δ^E_{00} und Δ_T willkürlich eingegeben wurden, die Phasenkombination Δ_{LS} gefittet wurde und die restlichen Phasen auf den Werten von Arndt1 festgehalten wurden. Aufgetragen sind diejenigen Wertepaare δ_{00} und Δ_T, die zu einem χ^2 führen, das bezogen auf den Bestfit von Tab. 5.6 um eins vergrößert ist.

Die Neigung der Kurve χ^2 = konst. zeigt die starke und über einen weiten Bereich sogar lineare Abhängigkeit zwischen δ^E_{00} und Δ_T. Wären die beiden Parameter völlig unabhängig, so müßte die Kurve symmetrisch bezogen auf die Koordinatenachsen liegen. Zieht man bei z.B. $\delta^E_{00} = 53{,}53°$ eine senkrechte Gerade, so liefern die Schnittpunkte mit der Kurve gerade den in Tab. 5.6 angegebenen statistischen Fehler von Δ_T. Gibt man sich einen möglichen Variationsbereich für δ^E_{00} vor, so kann man aus Fig. 5.8 entnehmen, wie sich dadurch der Fehler von Δ_T vergrößert.

In Fig. 5.9 ist analog zu Fig. 5.8 der Zusammenhang zwischen den Streuphasenkombinationen Δ_C und Δ_{LS} dargestellt. Hier wurde jeweils der Parameter Δ_T nachgefittet. Aus der Grafik kann man ablesen, welchen Einfluß ein möglicher Fehler der Kombination Δ_C auf den Fehler von Δ_{LS} hat.

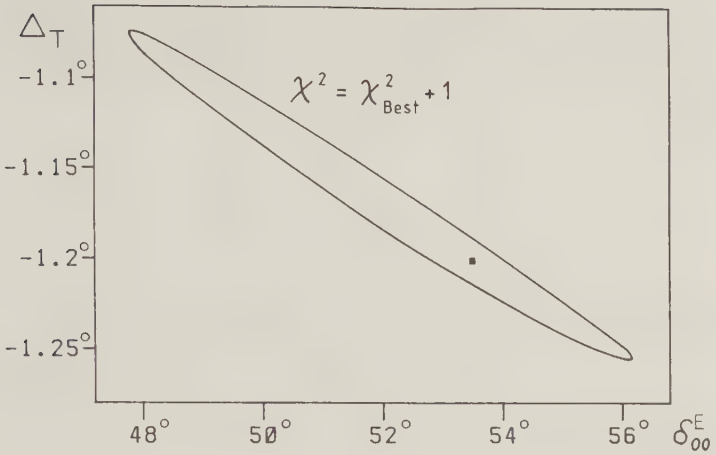

Fig. 5.8: Parameterbereich mit konstantem χ^2 für das Paar $(\delta^E_{00}, \Delta_T)$ bei nachgefittetem Δ_{LS}.

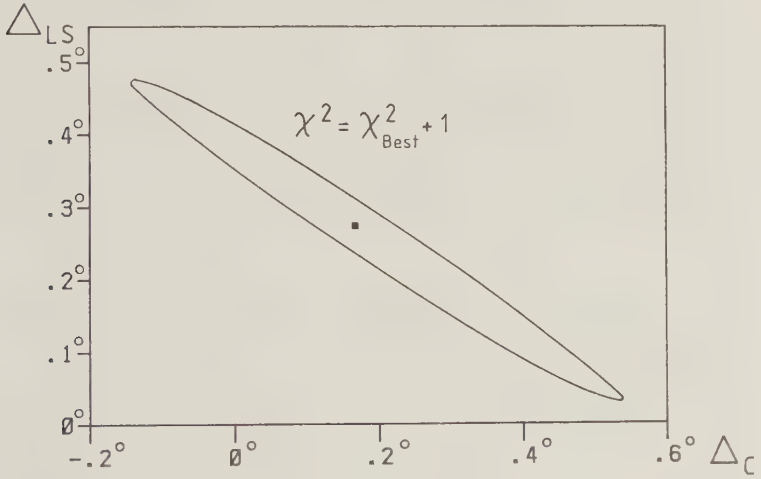

Fig. 5.9: Parameterbereich mit konstantem χ^2 für das Paar (Δ_C, Δ_{LS}) bei nachgefittetem Δ_T.

Weiterhin zeigen die beiden Kurven, innerhalb welchem Bereich sich die angegebenen Parameter allein mit der Analysierstärkemessung festlegen lassen. Man kann näherungsweise folgende Ungleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} 48^\circ &\leq \delta_{00} \leq 56^\circ, \\ -0{,}2^\circ &\leq \Delta_C \leq 0{,}6^\circ, \\ 0^\circ &\leq \Delta_{LS} \leq 0{,}5^\circ, \\ -1{,}25^\circ &\leq \Delta_T \leq -1{,}05^\circ. \end{aligned}$$

Bezieht man in die Analyse zusätzlich zu den Analysierstärkedaten die oben zitierten Depolarisationspunkte ein, so erhält man die in Tab. 5.10 dargestellten Bestfit-Parameter. In Fig. 5.11 sind die experimentellen Werte für D(Θ) zusammen mit der Bestfitkurve aufgetragen. Für A(Θ) sieht die Kurve wie bei Fig. 5.7 aus. Die P-Phasen ändern sich gegenüber den vorhergehenden Fits um eine Größenordnung weniger als der statistische Fehler der Phasen. Bei den Δ_i ist die Änderung noch kleiner. Die Fehler sind im wesentlichen die gleichen wie in Tab. 5.6. Das zeigt, daß die Genauigkeit der Depolarisationsdaten noch nicht ausreicht, um einen wesentlichen Einfluß auf das Fitergebnis zu nehmen. Da χ^2 pro Freiheitsgrad hier auf 1,4 ansteigt und die Depolarisationsdaten als vorläufig zu betrachten sind, werden im folgenden nur Fits mit den Analysierstärkedaten betrachtet.

	Arndt1	*Arndt2*	*Paris*	*Nijmegen*
gefittet:				
Δ_{LS}	0,275±0,039	0,308±0,035	0,281±0,035	0,274±0,035
Δ_T	-1,200±0,011	-1,188±0,012	-1,212±0,012	-1,229±0,012
aus der Fehlermatrix:				
δ^E_{10}	4,418±0,059	4,258±0,084	4,440±0,079	4,515±0,075
δ^E_{11}	-2,507±0,056	-2,564±0,043	-2,549±0,046	-2,582±0,047
δ^E_{12}	0,923±0,042	0,904±0,036	0,921±0,036	0,916±0,036

Tab. 5.10: Bestfitparameter in Grad aus Fit an Analysierstärke- und Depolarisationswerten mit statistischen Fehlern. Feste Parameter wie bei Tab. 5.6.

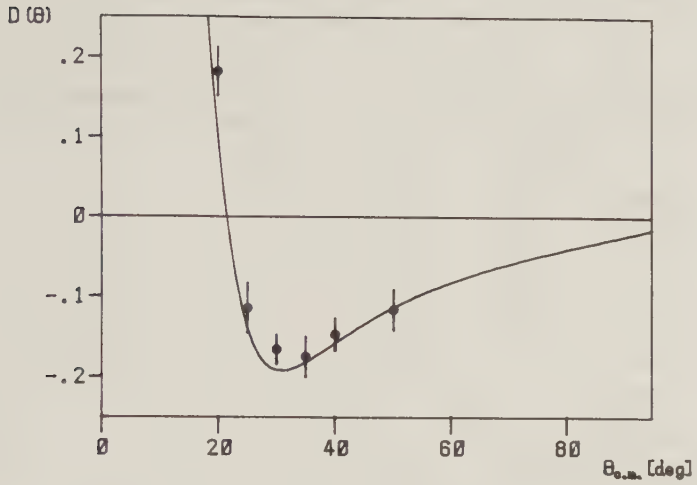

Fig. 5.11: Experimentelle Depolarisationspunkte (Höp 86) mit Bestfitkurve aus Analyse mit Analysierstärke- und Depolarisationswerten.

In Tab. 5.13 sieht man einen Vergleich zwischen den Bestfit-Parametern Δ_{LS} und Δ_T aus Tab. 5.6 und den entsprechenden theoretischen Vorgaben. Gegenüber den Vorhersagen ergeben alle Fits für Δ_{LS} größere Werte entsprechend einem stärkeren anziehenden Spin-Bahn-Potential. Bei Δ_T liefern die Fits tendentiell betragsmäßig kleinere Werte, was einem schwächeren abstoßenden Tensor-Potential entspricht. Die Übereinstimmung zwischen Vorhersage und Fitergebnis ist beim Parametersatz Arndt1 am besten. Dies zeigt sich auch in Fig. 5.12, wo die berechneten Winkelverteilungen der Observablen zusammen mit den experimentellen Punkten eingezeichnet sind. Berechnet man jeweils χ^2 aus den Analysierstärkedaten, so ergibt sich für Arndt1 der nahe am Bestfit gelegene Wert 15, für Arndt2 17, für Paris 30 und für Nijmegen 17. Die Arndtsche Analyse scheint also die verläßlichsten Parameter zu liefern. Deshalb wird für alle folgenden Untersuchungen stets von den mit Hilfe von Arndt1 bestimmten Bestfit-Phasen ausgegangen.

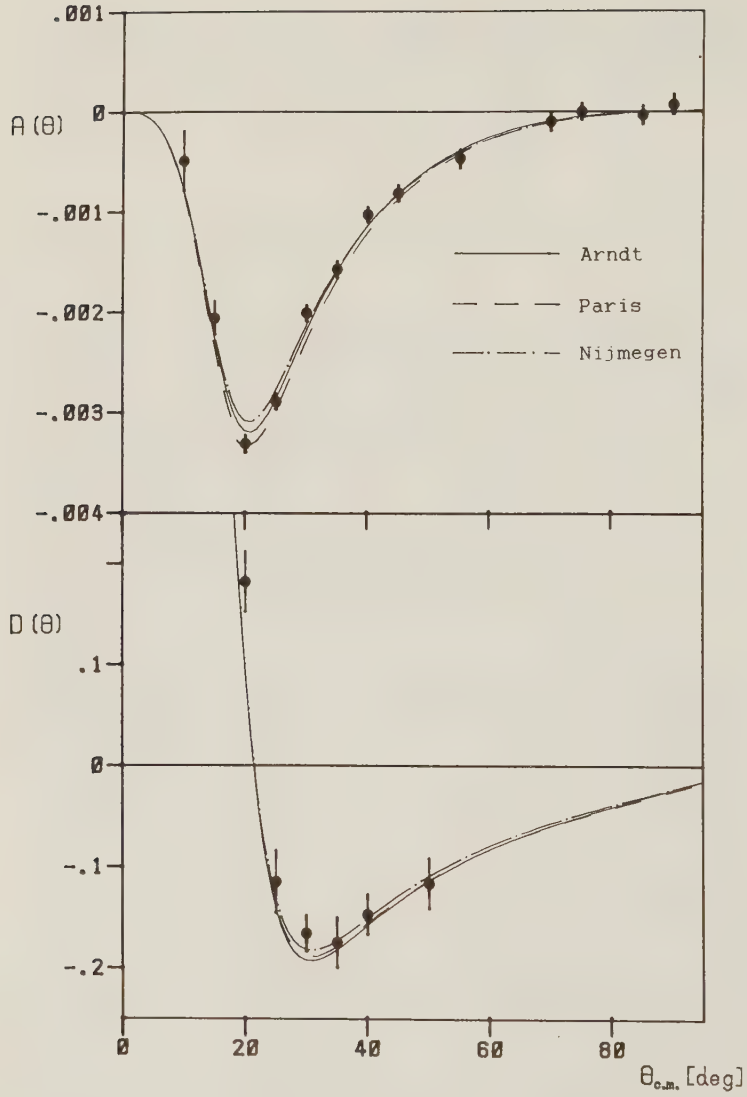

Fig. 5.12: Experimentelle Analysierstärke- und Depolarisationswerte im Vergleich mit Modellvorhersagen.

		Arndt1	*Arndt2*	*Paris*	*Nijmegen*
Startwert:					
	Δ_{LS}	0,228	0,258	0,213	0,205
	Δ_T	-1,210	-1,168	-1,252	-1,217
	χ^2	15	17	30	17
Fitergebnis:					
	Δ_{LS}	0,274	0,307	0,280	0,274
	Δ_T	-1,202	-1,191	-1,214	-1,230
	χ^2(Best)	12,0	12,0	12,2	12,6
	χ^2/f	1,1	1,1	1,1	1,1

Tab. 5.13: Vergleich der gefitteten Streuphasen mit Vorhersagen von Potentialmodellen und energieabhängigen Analysen. Alle Phasen in Grad.

Bei der Analyse wurde bisher nicht berücksichtigt, daß die fest eingegebenen Parameter mit einem Fehler behaftet sind. Deshalb sind die in Tab. 5.6 und Tab. 5.10 angegebenen Fehler zu klein. Sie beziehen sich nur auf die Fehler der experimentellen Daten. Die von Arndt angegebenen Fehler für die Streuphasen der energieabhängigen Analyse sind extrem klein. Um zu realistischen Fehlern zu kommen, wurde mit einer Unsicherheit in den Phasen δ^E_{00} und Δ_C gerechnet, die man bei Einzelenergieanalysen von Wirkungsquerschnittsdaten im Energiebereich um 10 MeV typischerweise erhält (Heg 77). Es wurde für δ^E_{00} ein Fehler von 0,05° und für Δ_C ein Fehler von 0,02° angenommen.

Um die jetzt fest eingegebenen Parameter experimentell bestimmen zu können, wird in Erlangen eine Messung der Winkelverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts bei 12 MeV durchgeführt (Pos 86). Nach Abschluß dieser Messungen wird man δ^E_{00} und Δ_C etwa mit den oben angenommenen Fehlern bestimmen können.

Variiert man die beiden Parameter um diese Fehler und führt jeweils einen neuen Phasenfit durch, so erhält man aus den Verschiebungen der Bestfit-Parameter die zusätzlichen Fehler für Δ_{LS} und Δ_T. Die Ergebnisse sind für den Phasensatz Arndt1 in Tab. 5.14 dargestellt. Die Quadrate der unter "Gesamtfehler" eingetragenen Zahlen sind die Summen aus den Fehlerquadraten der statistischen und der zusätzlichen Fehler.

	Wert	*statist. Fehler*	*zusätzl. Fehler*	*Gesamt-Fehler*
gefittet:				
Δ_{LS}	0,274	0,034	0,013	0,036
Δ_T	-1,202	0,011	0,005	0,012
aus der Fehlermatrix:				
δ^E_{10}	4,429	0,098	0,066	0,118
δ^E_{11}	-2,511	0,030	0,028	0,041
δ^E_{12}	0,923	0,032	0,009	0,033

Tab. 5.14: Bestfitparameter in Grad aus Fit an Analysierstärkewerten mit statistischen und zusätzlichen Fehlern (siehe Text).

Um einen Zusammenhang zwischen den in dieser Arbeit ermittelten Streuphasenkombinationen mit denen anderer Autoren herzustellen, wurden in Fig. 5.15 die Modellvorhersagen für die Δ_i als Funktion der Einschußenergie E aufgetragen. Die experimentellen, auf Analysierstärke- und zum Teil Wirkungsquerschnittsmessungen beruhenden Daten liegen bei 5,05 und 9,85 MeV (Bar 82), 6,14 MeV (Bit 79), 12 MeV (diese Arbeit) und 16 MeV (Lov 75).

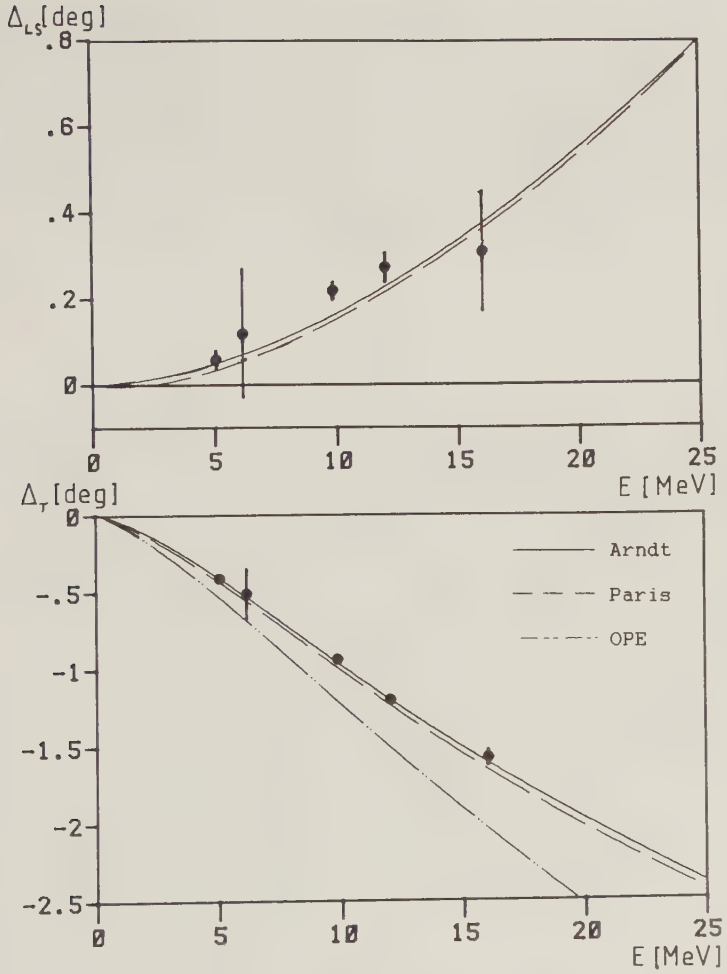

Fig. 5.15: Experimentell bestimmte Werte der L = 1 - Streuphasenkombinationen Δ_{LS} und Δ_T als Funktion der Einschußenergie. Durchgezogene Kurve aus Multienergieanalyse, gestrichelte Kurven aus Modellvorhersagen.

Man erkennt, daß die Modellvorhersagen den energetischen Verlauf der Tensorkombination Δ_T gut wiedergeben und daß dies qualitativ sogar für das einfache OPE-Modell zutrifft. Der Ein-Pion-Austausch liefert allerdings für die Spin-Bahn-Kombination den Wert Null. Daher zeigt die Abweichung der experimentellen Punkte von Null, daß selbst bei niedrigen Energien zu ihrer Beschreibung der Austausch von schwereren Mesonen bzw. Mehrmesonenaustauschprozesse notwendig sind.

5.3 Streulängen und effektive Reichweiten

In Kapitel 2.6 wurde die Effektive-Reichweite-Funktion $J_J(k)$ für die ^{3}P-Streuphasen eingeführt. Der erwartete fast lineare Verlauf der Energieabhängigkeit bis etwa 30 MeV Laborenergie erlaubt eine einfache Parametrisierung durch die Parameter Streulänge a, effektive Reichweite r und Formparameter P und Q. In Fig. 5.16 sind die aus den P-Phasen der Tab. 5.14 berechneten Werte $J_J(k)$ zusammen mit den Ergebnissen bei anderen Energien aufgetragen. Es handelt sich bei 5,05 MeV und 9,85 MeV um experimentell ermittelte Werte von Barker (Bar 82), bei 12 MeV um die Ergebnisse dieser Arbeit. Andere experimentell bestimmte Werte mit vergleichbarem Fehler liegen in dem betrachteten Energiebereich nicht vor. Deshalb wurde noch bei 25 MeV das Ergebnis einer Phasenanalyse von Arndt (Arn 83) mitverwendet. Es stellt eine gleichzeitige Analyse mehrerer pp- und np-Daten bei verschiedenen Energien in der Nähe von 25 MeV dar. Hierdurch gehen in das Ergebnis verschiedene modellabhängige Annahmen ein und die Größe des Fehlerbalkens ist schwer interpretierbar. Benutzt man bei 25 MeV eine Analyse von Bohannon (Boh 76), so erhält man das in Fig. 5.17 gezeigte Ergebnis.

Zum Vergleich sind die aus der globalen Analyse von Arndt und den Potentialmodellen von Nijmegen und Paris berechneten Effektive-Reichweite-Funktionen in Fig. 5.18 zusammen mit den experimentellen Punkten abgebildet.

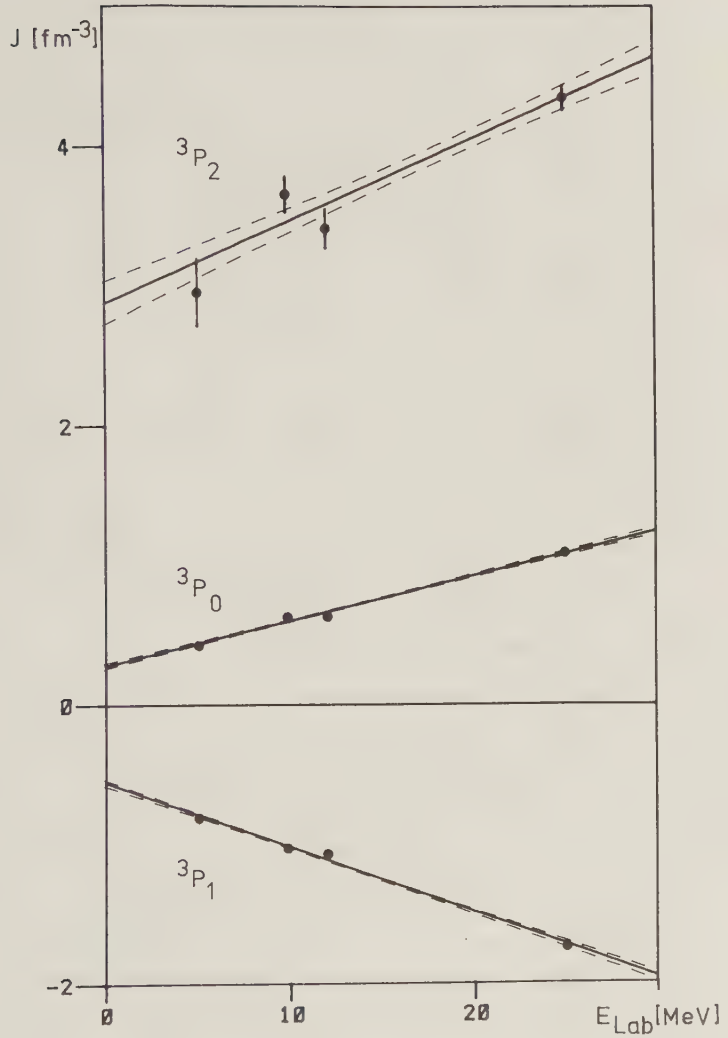

Fig. 5.16: Eff.-Reichweite-Funktionen der P-Streuphasen, an Punkte von Barker (5,05 und 9,85 MeV), dieser Arbeit (12 MeV) und Arndt (25 MeV) gefittet.

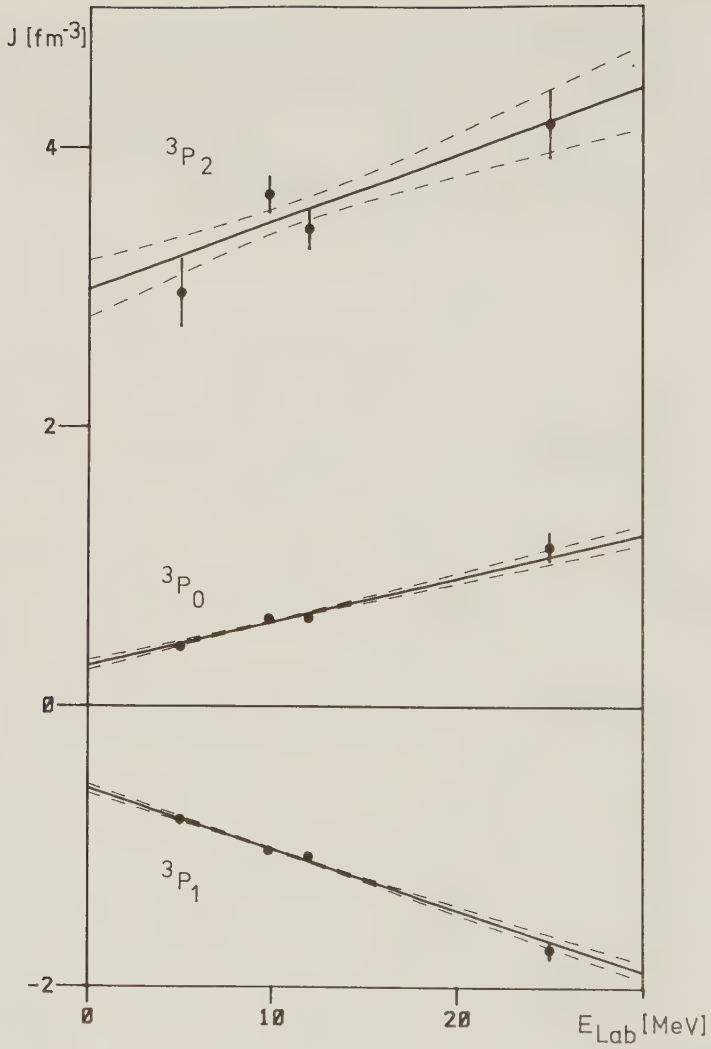

Fig. 5.17: Eff.-Reichweite-Funktionen der P-Streuphasen, an Punkte von Barker (5,05 und 9,85 MeV), dieser Arbeit (12 MeV) und Bohannon (25 MeV) gefittet.

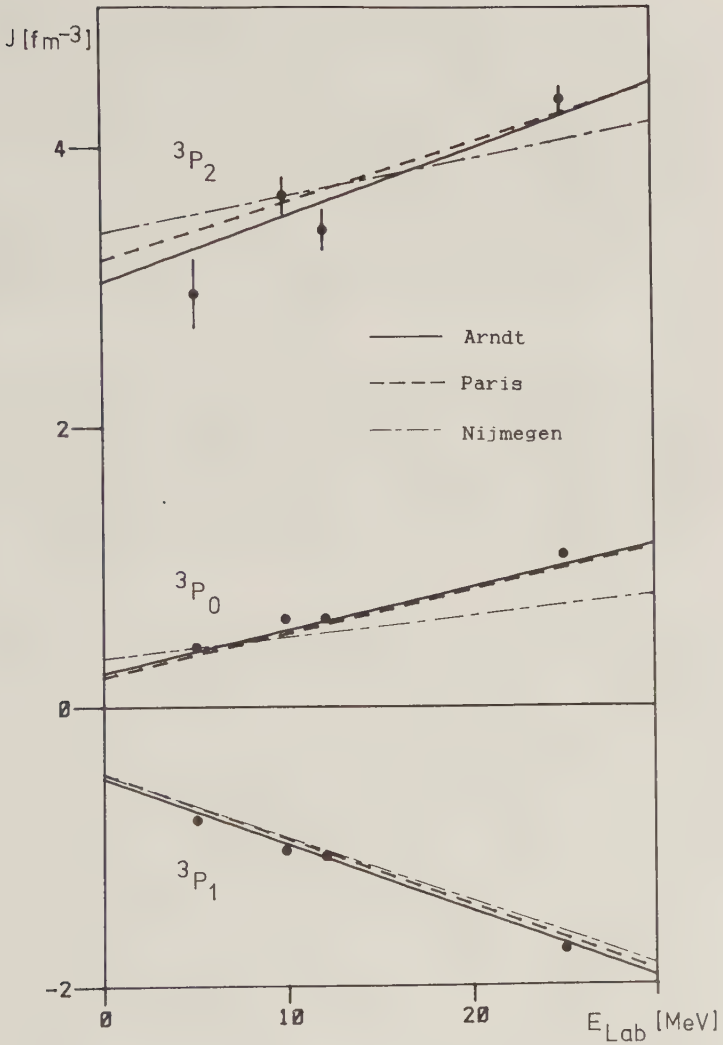

Fig. 5.18: Eff.-Reichweite-Funktionen der P-Streuphasen; Vergleich zwischen Modellvorhersagen und den in Fig. 5.16 gezeigten experimentellen Werten.

Die Effektive-Reichweite-Parameter wurden aus den Datenpunkten folgendermaßen gewonnen: Zunächst wurde ein Polynomfit bis zu dritten Grades in der Variablen k^2 durchgeführt. Aus den berechneten Koeffizienten wurden dann die Parameter a, r und gegebenenfalls P und Q berechnet und deren Fehler mit Hilfe der Fehlermatrix bestimmt. Wegen der wenigen zur Verfügung stehenden Daten wurden in Fig. 5.16 und Fig. 5.17 nur die Parameter a und r gefittet, d.h. eine lineare Energieabhängigkeit von J angenommen. Aus den Koeffizienten des Polynomfits und der Fehlermatrix wurde jeweils die durchgezogene Linie mit dem gestrichelt eingezeichneten Fehlerband berechnet.

Die experimentellen Daten streuen stärker um die Fitkurve, als es statistisch zu erwarten ist, besonders bei der $^3P_2$-Phase. Dies ändert sich auch nicht nach Hinzunahme des Formparameters P. Die wirklichen Fehler der ermittelten Parameter sind daher größer als die aus den Fehlern der Streuphasen berechneten statistischen Fehler. Zur Klärung dieses Sachverhalts wäre eine größere Datenbasis wünschenswert.

Die numerischen Werte für a und r mit den statistischen Fehlern sind in Tab. 5.19 zusammen mit Analysen anderer Autoren aufgelistet. "Erg1" bzw. "Erg2" bezieht sich auf die Ergebnisse dieser Arbeit mit den 25 MeV - Phasen von Arndt bzw. Bohannon. "Nais", "Bark" und "Math" sind Analysen von Naisse (Nai 77), Barker (Bar 83) und Mathelitsch (Mat 84). Bei der Analyse von Naisse wurden die Effektive-Reichweite-Parameter nicht aus einer Streuphasenanalyse experimenteller Daten berechnet, sondern es wurden zunächst die Parameter eines phänomenologischen Potentialansatzes an die vorhandene Datenbasis von 0 bis 30 MeV angepaßt. Aus dem Potential wurden dann a und r berechnet. Darauf sind die unrealistisch kleinen Fehler zurückzuführen. Die ohne Fehler angegebenen Werte wurden aus Streuphasen der globalen Analyse von Arndt im Energieintervall von 1 MeV bis 30 MeV berechnet; die aus dem Nijmegen- bzw. Paris-Potential berechneten Werte stammen aus (Nag 78a) bzw. (Bar 83).

	$^3P_0$		$^3P_1$		$^3P_2$	
Nais	-3,12	± 0,01	1,99	± 0,005	-0,282	± 0,002
Bark	-4,82	± 1,11	1,78	± 0,1	-0,317	± 0,023
Math	-2,84	± 0,02	1,90	± 0,01	-0,31	± 0,01
Erg1	-3,55	± 0,24	1,81	± 0,07	-0,347	± 0,019
Erg2	-3,45	± 0,42	1,70	± 0,09	-0,335	± 0,023
Arndt	-3,26		1,91		-0,318	
Nijmegen	-2,84		1,99		-0,294	
Paris	-3,42		2,05		-0,30	

Streulängen a_{1J} in fm³

Nais	3,93	± 0,02	-7,64	± 0,01		
Bark	7,84	± 0,93	-7,85	± 0,52	7,5	± 2,9
Math	4,45	± 0,05	-7,56	± 0,05	7,59	± 0,28
Erg1	5,32	± 0,22	-7,76	± 0,28	9,75	± 1,35
Erg2	5,17	± 0,58	-7,19	± 0,50	7,95	± 2,61
Arndt	3,87		-7,67		5,49	
Nijmegen	2,46		-7,56		4,40	
Paris	4,00		-7,69		5,7	

Effektive Reichweiten r_{1J} in fm^{-1}

Tab. 5.19: Effektive-Reichweite-Parameter für die P-Wellen.

6 *Schlußbemerkung*

Die in dieser Arbeit vorgestellte Messung der Analysierstärke bei 12 MeV hat gezeigt, daß vorhandene Potentialmodelle und globale Phasenanalysen die Observablen recht gut beschreiben.

Um auf modellunabhängige Weise eine Einzelenergieanalyse bei 12 MeV durchführen zu können, benötigt man außer der Analysierstärke noch weitere Meßgrößen bei dieser Energie. Um die Unsicherheit in der L = 0 - Phase δ_{00}^{E} und der Streuphasenkombination Δ_C zu beheben, wird daher in Erlangen eine Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts durchgeführt (Pos 86). Bei den ebenfalls in Erlangen gemessenen Depolarisationswerten wird sowohl die statistische Genauigkeit verbessert als auch die Winkelverteilung vervollständigt, so daß dann erstmalig 3 unabhängige Observablen für eine Phasenanalyse im Niederenergiebereich zur Verfügung stehen werden.

Weitere Analysierstärkemessungen bei höheren Energien bis etwa 30 MeV würden es ermöglichen, die Effektive-Reichweite-Parameter der L = 1 - Streuphasen und damit deren Energieabhängigkeit besser festlegen zu können. Bisher war man in diesem Energiebereich auf die Ergebnisse von Multienergieanalysen angewiesen. Außer den Streulängen und effektiven Reichweiten lassen sich bei genügend vielen gemessenen Energien auch Shape-Parameter bestimmen.
Entsprechende Experimente sind am Schweizerischen Institut für Nuklearforschung (SIN) in Vorbereitung. Dabei kann auf die Erfahrung, die bei der 12 MeV - Messung gewonnen wurde, zurückgegriffen werden. Neben dem fensterlosen Gastarget hat sich insbesondere die in Kap. 3 beschriebene Anordnung zur koinzidenten Messung der gestreuten und rückgestreuten Protonen bewährt. Sie wird nunmehr bei allen Streuwinkeln eingesetzt. Die Meßgenauigkeit wird damit praktisch nur durch die statistischen Fehler begrenzt. Eine weitgehende Fernsteuerbarkeit und Fernüberwachung des Experiments soll die Betriebssicherheit erhöhen und damit die Ausnutzung der Strahlzeiten verbessern.

Eine andere Motivation für die Messung der pp-Analysierstärke zwischen 20 und 30 MeV ist die Tatsache, daß in diesem Energiebereich gute np-Daten vorliegen (Wil 84). Ein Vergleich der pp- und np-Streuphasen kann bei genügender Meßgenauigkeit Aussagen über die Verletzung der Isospin - Invarianz in der starken Wechselwirkung machen.

Literaturverzeichnis

Abr 65 M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Washington (1965)

Ajz 70 F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. A152 (1970) 51

Ale 60 I. Alexeff, W. Haeberli, Nucl. Phys. 15 (1960) 609

Arn 83 R. A. Arndt, R. B. Clark, B. J. VerWest, P. Signell Phys. Rev. D28 (1983) 97

Bar 82 M. D. Barker, P. C. Colby, W. Haeberli, P. Signell, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 918

Bev 69 P. R. Bevington, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw Hill Book Comp., New York (1969)

Bit 79 G. Bittner, W. Kretschmer, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 330

Bit 79a G. Bittner, W. Kretschmer, W. Schuster, Nucl. Instr. and Meth. 161 (1979) 1

Bla 52 J. Blatt, L. Biedenharn, Rev. Mod. Phys. 24 (1952) 258

Bla 59 W. A. Blanpied, Phys. Rev. 116 (1959) 738

Boh 76 G. E. Bohannon, T. Burt, P. Signell, Phys. Rev. C13 (1976) 1816

Bro 58 K. W. Brockman, Phys. Rev. 110 (1958) 163

Bro 83 I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1983)

Cat 68 P. Catillon, J. Sura, A. Tarrats, Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 602

Dur 57 L. Durand III, Phys. Rev. 108 (1957) 1597

Els 84 K. Elsener, Dissertation, Zürich (1984)

Eri 56 E. Eriksen, L. L. Foldy, W. Rarita, Phys. Rev. 103 (1956) 781

Fan 57 U. Fano, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 74

Fic 72 D. Fick, *Einführung in die Kernphysik mit polarisierten Teilchen*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1971)

Gam 60 J. L. Gammel, R. M. Thaler, Progr. Cosmic Ray Phys. 5 (1960) 97

Geb 83 R. Gebhardt, Diplomarbeit, Erlangen (1983)

Gol 64 M. L. Goldberger, K. M. Watson, *Collision Theory*, John Wiley & Sons, New York (1964)

Ham 62 T. Hamada, I. D. Johnston, Nucl. Phys. 34 (1962) 382

Heg 77 P. M. Hegland, R. E. Brown, J. S. Lilley, J. A. Koepke, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 9

Hel 60 L. Heller, Phys. Rev. 120 (1960) 627

Höp 86 R. Höpfl, Universität Erlangen-Nürnberg, private Mitteilung

Hos 68 N. Hoshizaki, Suppl. Prog. Theor. Phys. 42 (1968) 107

Hut 75 J. D. Hutton, W. Haeberli, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 429

Ima 81 K. Imai, T. Matsusue, H. Shimizu, J. Shirai, K. Nisimura, in *Polarization Phenomena in Nuclear Physics*, ed. G. G. Ohlsen, R. E. Brown, N. Jarmie, W. W. McNaughton, G. M. Hale, New York (1981) 140

Kön 84 V. König, ETH Zürich, private Mitteilung

Lac 80 M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, R. Vinh Mau, J. Côté, P. Pirès, R. de Tourreil, Phys. Rev. C21 (1980) 861

Lov 75 P. A. Lovoi, G. G . Ohlsen, N. Jarmie, C. E. Moss, D. M. Stupin, in *Proceedings of the Fourth International Symposium on Polarisation Phenomena in Nuclear Reactions*, ed. W. Grüebler and V. König, Birkhäuser Verlag (1975) 450

Mac 67 M. H. MacGregor, R. M. Wright, R. A. Arndt, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1209

Mac 69 M. H. MacGregor, R. A. Arndt, R. M. Wright, Phys. Rev. 182 (1969) 1714

Mac 86 R. Machleidt, K. Holinde, C. Elster, *The Bonn Meson Exchange Model for the Nucleon Nucleon Interaction*, wird veröffentlicht

Mad 70 Madison Konvention in *Polarization Phenomena in Nucl. Reaction*, ed: H. H. Barschall, W. Haeberli, University of Wisconsin Press (1970)

Mat 84 L. Mathelitsch, B. J. VerWest, Phys. Rev. C29 (1984) 739

Nag 78 M. M. Nagels, T. A. Rijken, J. J. de Swart, Phys. Rev. D17 (1978) 768

Nag 78a M. M. Nagels, T. A. Rijken, J. J. de Swart, in *Few Body Systems and Nuclear Forces*, ed. H. Zingl, M. Haftel, H. Zankel, Springer Verlag (1978) 17

Nai 77 J. P. Naisse, Nucl. Phys. A278 (1977) 506

Ohl 73 G. G. Ohlsen, P. W. Keaton,
Nucl. Instr. Meth. 109 (1973) 41

Pos 86 F. Post, Diplomarbeit, Erlangen (1986)

Rod 67 L. S. Rodberg, R. M. Thaler, *Introduction to the Quantum Theory of Scattering*, Academic Press,
New York (1967)

Sch 81 P. A. Schmelzbach, W. Grüebler, V. König, B. Jenny,
Nucl. Instr. and Meth. 186 (1981) 655

Sch 84 R. Schmitt, Universität Erlangen-Nürnberg,
private Mitteilung

Sch 86 R. Schmitt, Dissertation, Erlangen (1986)

Sch 78 W. Schuster, Zulassungsarbeit, Erlangen (1978)

Sch 49 J. Schwinger, Phys. Rev. 75 (1949) 651

She 70 M. S. Sher, P. Signell, L. Heller,
Ann. of Phys. 58 (1970) 1

Sil 59 E. A. Silverstein, Nucl. Instr. and Meth. 4 (1959) 53

Slo 67 R. J. Slobodrian, J. S. C. McKee, H. Bichsel,
W. F. Tivol, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 704

Sta 57 H. P. Stapp, T. J. Ypsilantis, N. Metropolis,
Phys. Rev. 105 (1957) 302

Swa 84 J. J. de Swart, W. A. van der Sanden, W. Derks,
Nucl. Phys. A416 (1984) 299c

Swa 86 J. J. de Swart, University of Nijmegen,
private Mitteilung

Tra 77 M. Trautner, *Bedienungsanleitung der Programme A15 und Z15*, Erlangen (1977), unveröffentlicht

Ueh 35 E. A. Uehling, Phys. Rev. 48 (1935) 55

Ulb 72 J. Ulbricht, G. Clausnitzer, G. Graw, Nucl. Instr. and Meth. 102 (1972) 93

Urb 77 P. Urbainsky, Diplomarbeit, Erlangen (1977)

Urb 78 P. Urbainsky, *Jahresbericht des Physikalischen Instituts*, Erlangen (1977/78)

Vin 83 R. Vinh Mau, in *Proc. Int. Conf. Nucl. Phys.*, Florence (1983) 61

Vin 86 R. Vinh Mau, Institut de Physique Nucleaire, Orsay, private Mitteilung

Wat 77 W. Watari, Osaka City University, private Mitteilung

Wil 84 J. Wilczynski, Dissertation, Karlsruhe (1984)

J. Wilczynski, J. Hansmeyer, F. P. Brady, P. Doll, W. Heeringa, J. C. Hiebert, H. O. Klages, P. Plischke, Nucl. Phys. A425 (1984) 458

Wol 52 L. Wolfenstein, J. Ashkin, Phys. Rev. 85 (1952) 947

Mein Dank gilt

Herrn Prof. Dr. E. Finckh für das Interesse am Fortgang der Arbeit und für die Möglichkeit, sie an seinem Institut durchführen zu können;

Herrn Prof. Dr. W. Grüebler für die Zusammenarbeit mit seiner Arbeitsgruppe an der ETH Zürich;

Herrn Priv. Doz. Dr. W. Kretschmer für die sorgfältige Betreuung der Arbeit und der steten Bereitschaft, alle anstehenden Probleme zu diskutieren;

Herrn Dr. W. Schuster, der durch seinen großen Einsatz beim Aufbau, Vorbereiten und Durchführen der Experimente wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat;

den Herren Dr. H. Löh, Dr. R. Schmitt, Dipl. Phys. M. Haller und F. Post für die kameradschaftliche Zusammenarbeit bei den Strahlzeiten;

den Herren Dr. J. Ulbricht, Dr. V. König, Dr. P. A. Schmelzbach, Dr. C. Forstner und den anderen Mitgliedern der Züricher Arbeitsgruppe, die die Voraussetzungen zur Durchführung der Experimente mitgeschaffen haben;

allen Mitgliedern der "polarisierten Gruppe" in Erlangen für das gute Arbeitsklima;

der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung von Sach- und Personalmitteln.

Lebenslauf

Armin Rauscher

Geburt:	15. Januar 1957 in Herrieden
Eltern:	Wilhelm Rauscher, Maler
	Anna Rauscher, geb. Dick
Familienstand:	Ledig
Schulen:	1963 – 1967 Volksschule Herrieden
	1967 – 1976 Platen-Gymnasium Ansbach
Wehrdienst:	1976 – 1977 Regensburg
Studium:	1977 – 1983 Studium der Physik an der
	Universität Erlangen-Nürnberg
Prüfungen:	Juni 1976 Abitur
	Nov. 1979 Diplom-Vorprüfung in Physik
	März 1983 Diplom in Physik
Stellungen:	1983 – 1986 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
	am Physikalischen Institut der Universität
	Erlangen-Nürnberg

A.R.

Offsetdruck · Fotodruck · Hogl · Hauptstraße 109 · 8520 Erlangen · Tel. 09131/22990